Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Proč divergují následující řady?

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Úloha 2: S užitím definice součtu řady vyřešte následující úlohy

a) Ukažte, že řada harmonická řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje.

b) Ukažte, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverguje.

c) Vyšetřete konvergenci, resp. divergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

d) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a \in \mathbb{R}$. Určete $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$.

Úloha 3: Vyšetřete konvergenci řad

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$.

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n+4}{2n^2+5}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+3n+4}{(2n^2+5)^2}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{n^3}$.

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^4+n^2}$.

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n+7^n}{8^n-2^n}$.

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+2}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$

k) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n}\,\sqrt[3]{n-2}}.$

Úloha 4: Vyšetřete konvergenci řad

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right).$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-1}\right).$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right).$

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3-3}\right).$

Úloha 5: Vyšetřete konvergenci řad

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}.$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}\frac{1}{5^n}.$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}.$

Úloha 6: Vyšetřete konvergenci následujících řad

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n.$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1}\right)^n.$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+\sqrt{n})^n}{(2n^2+n)^{\frac{n}{2}}}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$.

Úloha 7: Vyšetřete konvergenci řad

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n-1}{2n}}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt{n}}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+1}$.

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1000}}$.

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2^n}}$

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot 3^n}$.

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$.

k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{(2n)!}$.

l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$.

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^n$.

n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\cos n}{n+\ln n}$

o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n(n+2)}$

p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}.$

q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}.$

r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}.$

s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

t) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\log^2 n}$.

Úloha 8: Rozhodněte, pro jaká $a > 0$ konvergují řady

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+na}{\sqrt{n^2+n^6a}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4a^n$

Úloha 9: Dokažte, že pokud řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, potom konverguje i řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Platí tvrzení i pro řady, které konvergují jen neabsolutně?

Úloha 10: Dokažte, že pokud řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladnými členy diverguje a $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ je posloupnost částečných součtů, potom řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ diverguje a řada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^2}$ konverguje.