

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Rozhodněte, zdali jsou následující posloupnosti monotonní a pokud ano, určete, jestli jsou rostoucí, klesající, neklesající nebo nerostoucí.

- a) $\{2n + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$
- b) $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- c) $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- d) $\left\{\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Úloha 2: Podle definice určete limitu posloupnosti

- a) $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- b) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- c) $\{\log n\}_{n=1}^{\infty}$
- d) $\left\{\frac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- e) $\left\{\frac{n+1}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$
- f) $\{\sqrt[n]{a}\}_{n=1}^{\infty}$, kde a je kladné reálné číslo.
- g) $\left\{\sin \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Úloha 3: Rozhodněte, zdali platí následující tvrzení. Pokud platí, dokažte je. Neplatí-li, nejprve je vyvráťte a poté se je pokuste opravit tak, aby platila (jde-li to).

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = a$
- c) $(\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- d) $(\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n < b_n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- e) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \implies (\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n < b_n)$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$

pro posloupnost b_n danou předpisem $b_{2n-1} = a_n$, $b_{2n} = 0$.

Úloha 4: Spočítejte následující limity nebo dokažte, že neexistují.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(-1)^n$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n!}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

Úloha 5: Spočítejte následující limity.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2 - 2n}\right) \left(5 - \frac{1}{n^2}\right)$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n}{-n^2 + 4n}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7}$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 1}{2n^2 + n - 3}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 1}$

h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^{20}(3n+2)^{30}}{(2n+1)^{50}}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n + 10^n}{-2^{n+1} + 5^{n+1} + 10^{n+1}}$