Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Najděte funkci, které zobrazuje:

a) Interval $(0, 1)$ na interval $(0, \infty)$.

b) Interval $(0, 1)$ na interval $(-\infty, \infty)$.

c) Interval $(0, 1)$ na interval $\langle 0, 1\rangle$.

d) Interval $\langle 0, 1\rangle$ na interval $\langle 0, \infty)$.

e) Interval $(0, \infty)$ na interval $(0, 1)$.

Úloha 2: Dokažte matematickou indukcí:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$.

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Úloha 3: Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R},\ x > -1$ platí $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Úloha 4: U každého z následujících výroků nejprve zformulujte jeho negaci. Poté rozhodněte, zdali platí původní výrok, nebo jeho negace.

a) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 > 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : x < n$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : (x \geq n) \wedge (x < n+1)$

d) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R} : |x-2| < \delta\ \Rightarrow\ |x-3| < \varepsilon$

e) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} : |x-2| < \delta\ \Rightarrow\ |x-3| < \varepsilon$
(oproti předchozí variantě je rozdíl u rozsahu δ)

f) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N} : z > x \Rightarrow y < z$

g) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N} : z > x \Rightarrow y < z$

h) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{R} : z > x \Rightarrow y < z$

i) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{N} : z > x \Rightarrow y < z$

Úloha 5: Nechť M je zdola omezená posloupnost reálných čísel. Dokažte, že má (reálné) infimum. (Můžete využívat existenci suprema pro shora omezené množiny.)

Úloha 6: Dokažte, že množina iracionálních čísel je hustá v množině reálných čísel, tedy že na každém neprázdném otevřeném intervalu lze najít iracionální číslo. Můžete využívat skutečnost, že množina racionálních čísel je hustá v reálných číslech.

Úloha 7: V oboru reálných čísel určete suprema a infima následujících množin (pokud existují). Jsou to zároveň maxima či minima těchto množin?:

a) $M = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

b) $M = \left\{ -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

c) $M = \{0,3; 0,33; 0,333; 0,3333; \dots\}$

d) $M = \left\{ q : q < \sqrt{3},\ q \in \mathbb{Q} \right\}$

e) $M = \{\sin x : x \in \langle 0, 2\pi)\}$

f) $M = \{\sin x : x \in (0, 2\pi)\}$

g) $M = \{\sin x : x \in (0, \pi)\}$

h) $M = \left\{ 1 - \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N} \right\}$

i) $M = \left\{ \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$

j) $M = \left\{ \frac{p}{p+q}, p, q \in \mathbb{N} \right\}$

k) $M = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

l) $M = \left\{ n^{(-1)^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

m) $M = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$

n) $M = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$

o) $M = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$

p) $M = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

q) $M = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{Z}\}$

r) $M = \{5^{(-1)^j 3^k} : j, k \in \mathbb{Z}\}$

s) $M = \left\{ \cos\left(\frac{n+1}{n} \pi \right), n \in \mathbb{N} \right\}$

t) $M = \left\{ \cos\left(\frac{n+1}{n} \pi \right), n \in \mathbb{N}, n \text{ sudé} \right\}$

u) $M = \left\{ \cos\left(\frac{n+1}{n} \pi \right), n \in \mathbb{N}, n \text{ liché} \right\}$

Úloha 8: Nechť $f(x) = (1-x)^{-1}$. Určete $f \circ f$ a $f \circ f \circ f$.

Úloha 9: Charakterizujte zobrazení $f : A \to B$, pro která platí:

a) $\forall M \subseteq A : f^{-1}(f(M)) = M$

b) $\forall N \subseteq B : f(f^{-1}(N)) = N$