

Úlohy ke cvičení

Úloha 1: Podle definice určete derivace následujících funkcí.

- a) x^k pro $k \in \mathbb{N}$
- b) $\frac{1}{x}$
- c) $\sin x$
- d) e^x

Úloha 2: Určete derivace funkcí

- a) $\frac{x-1}{x+1}$
- b) $\frac{2}{(x^2-1)^3}$
- c) $\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2$
- d) $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$
- e) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
- f) $\sqrt{1 - \ln x}$
- g) $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
- h) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$
- i) $x^2\sqrt{\ln x - 1}$
- j) $\ln(\ln(\ln x))$
- k) $\ln(1 + e^{-x^2})$

Úloha 3: Pomocí vztahu pro derivaci inverzní funkce zderivujte funkce

- a) $\sqrt[x]{x}$
- b) $\arcsin x$

Úloha 4: Určete derivace funkcí

- a) $\sqrt{\sin x}$
- b) $\cos \sqrt{x-1}$
- c) $\cos^3(2x)$
- d) $\sin \sqrt{x+2}$
- e) $\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
- f) $\operatorname{arctg} \sqrt{x}$
- g) $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
- h) $\operatorname{arctg}(x^2)$

i) $\arcsin \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

j) $\operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$

k) $\ln(\cos x)$

l) $\ln(\operatorname{arctg} \sqrt{x})$

Úloha 5: Určete derivace funkcí

a) $e^{\sqrt{x+1}}$

b) $xe^{\frac{1}{x}} + e^{-\sqrt{x}}$

c) x^x

d) $x^{\sqrt{x}}$

e) $x^{\frac{1}{x}}$

f) $x^{\ln x}$

g) $\left(\frac{x}{x+1} \right)^x$

h) $(x^2 + 1)^{\sin x}$

i) $(\sin x)^{\cos x}$

Úloha 6: Určete derivace funkcí

a) $|x|$

b) $x|x|$

c) $\ln|x|$

d) $|\sin^3 x|$

e) $|(x-1)^2(x+1)^3|$

Úloha 7: Spočítejte derivace následujících funkcí v bodech ve kterých existují:

a)

$$\frac{2^x - 1}{3x}.$$

b)

$$\operatorname{arctg}(\ln x).$$

c)

$$\arcsin(\sin x)$$

d) Funkce f je zadaná předpisem:

- $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$,
- $f(0) = 0$.

Úloha 8: Pomocí derivací zjistěte:

a) Který z obdélníků o obvodu ℓ má největší obsah?

b) Který z válců o objemu V má nejmenší povrch?

c) Z čtvercového papíru odstříhneme v rozích malé čtverce a složíme krabičku (bez víka). Jak velké máme odstříhnout čtverce v rozích, aby krabička měla co největší objem?

Úloha 9: Dokažte následující nerovnosti:

a) $e^x \geq x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

b) $\ln(x) \leq x - 1$ pro $x \in (0, \infty)$.

c) $x + 1 \geq e^{\frac{x}{1+x}}$ pro $x \in (-1, \infty)$.

d) $\sin x \leq x$ pro $x \geq 0$.

e) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.