Martin Beránek, 2.F, X–11

Úloha 8 – Měření vlnových délek interferometry

Pracovní úkol:

1. Změřte vlnovou délku zelené čáry spektra rtuti Michelsonovým interferometrem. Totéž proveďte pro vlnovou délku He-Ne laseru.
2. Změřte vzdálenost spektrálních čar sodíkového dubletu Fabryho-Perotovým interferometrem.
3. Měření proveďte metodou postupných měření a určete chybu měření.

Teorie: V Michelsonově interferometru spolu interferují dva paprsky, jejichž dráhový rozdíl lze měnit posouváním jednoho ze zrcadel. V dalekohledu jsou vidět proužky stejného sklonu. Při posunutí zrcadla se proužky mění a posun o jednu vlnovou délku odpovídá tomu, že přes střed dalekohledu přejde právě jeden proužek. Počet zaznamenaných proužků je tedy přímo úměrný vzdálenosti o kterou bylo posunuto zrcadlo a k získání přesného výsledku mohu použít lineární regresi na postupně změřených hodnotách.

Fabry-Perotův interferometr využívá interference na dvou planparalelních rozhraních. Jde o dvě rozhraní mezi sklem a vzduchem a uprostřed je vzduchová mezera nastavitelné šířky. Skrz tato skla lze pozorovat proužky stejného sklonu, které jsou maximy jednotlivých řádů pro pozorovanou vlnovou délku. Tento interferometr jsem používal pro určení vzdálenosti čar sodíkového dubletu. Pokud proužky odpovídající oběma čarám ve spektru splynou, je dráhový rozdíl roven celočíselnému násobku Δ, kde

$$\Delta = k\lambda_1 = (k-1)\lambda_2\,, \tag{1}$$

kde λ_1 a λ_2 jsou vlnové délky obou čar. Řád k mohu z rovnice (1) určit jako

$$k = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad \text{a tedy} \qquad \Delta = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\,. \tag{2}$$

Pokud budu skly posouvat, mohu určit vzdálenost l, která odpovídá rozdílu sousedních poloh, ve kterých se proužky překrývají. Stejnou vzdálenost l naměřím také mezi polohami, ve kterých jsou proužky obou čar rozloženy rovnoměrně.

Protože je vzdálenost l polovinou dráhového rozdílu, platí

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2l}\,, \tag{3}$$

Za předpokladu malého rozdílu vlnových délek mohu zavést střední hodnotu λ_s a vztah (3) upravit na

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_\mathrm{s}^2}{2l}\,, \tag{4}$$

Měření: Michelsonovým interferometrem jsme měřil vlnovou délku zelené čáry rtuťové výbojky a vlnovou délku helium-neonového laseru. Odečítal jsem údaj na mikrometrickém šroubu vždy po 50 proužcích prošlých přes střed dalekohledu. Naměřené hodnoty a jimi proložené přímky jsou v grafu 1. Absolutní člen mě nezajímá a směrnice přímek jsou postupně

$$a_1 = (1{,}396 \pm 0{,}010)\,\mu\mathrm{m}\,, \quad a_2 = (1{,}421 \pm 0{,}011)\,\mu\mathrm{m}\,,$$
$$a_3 = (1{,}393 \pm 0{,}004)\,\mu\mathrm{m}\,, \quad a_4 = (1{,}435 \pm 0{,}010)\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Odhady chyby koeficientů regrese jednotlivých měření jsou velmi nízké – menší než jedno procento – což odpovídá předpokladu, že měřená závislost má být lineární. Výsledky čtyř provedených měření se ale liší trochu více. Výslednou hodnotu a odhaduji na

$$a = (1{,}41 \pm 0{,}02)\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Hodnota je aritmetickým průměrem a chybu odhaduje z rozptylu těchto čtyř měření. Mikrometrický šroub posouval zrcátkem přes převod s poměrem 1 : 5,2, takže teprve po vynásobení tímto poměrem získám hodnotu posunu zrcátka a vlnovou délku čáry rtuti λ_{Hg}.

$$\lambda_{\mathrm{Hg}} = \frac{2a}{5{,}2} = (542 \pm 8)\,\mathrm{nm}\,.$$

Stejným způsobem jsem měřil i vlnovou délku světla He-Ne laseru. Provedl jsem tři postupná měření po 50 proužcích. Naměřené hodnoty spolu s proloženými přímkami jsou v grafu 2. Směrnice jednotlivých měření v tomto případě vychází

$$b_1 = (1{,}727 \pm 0{,}011)\,\mu\mathrm{m}\,, \quad b_2 = (1{,}674 \pm 0{,}011)\,\mu\mathrm{m}\,, \quad b_3 = (1{,}633 \pm 0{,}007)\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Výslednou hodnotu opět určím jako průměr a chybu odhadnu z rozptylu tří měření, který je větší než statistický odhad u každého z koeficientů:

$$b = (1{,}68 \pm 0{,}05)\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Po přepočtení přes poměr převodu k zrcátku vychází pro vlnovou délku laseru λ_{l} hodnota

$$\lambda_{\mathrm{l}} = (650 \pm 20)\,\mathrm{nm}\,.$$

Při měření Fabryho-Perotovým interferometrem jsem odečítal vzdálenosti ve chvíli, kdy byly proužky odpovídající oběma čarám od sebe nejvíce vzdáleny. Tento způsob jsem zvolil proto, že čáry jsou v interferometru vidět dost široké a určit, kdy se přesně překrývají je dost nepřesné. Provedl jsme čtyři postupná měření, vždy pro šest po sobě následujících poloh s maximální vzdáleností proužků. Výsledky jsou v grafech 3 až 5. Opět mě zajímá pouze směrnice proložené přímky. Ta postupně pro jednotlivá měření vychází

$$l_1 = (0{,}2917 \pm 0{,}0028)\,\mathrm{mm}\,, \quad l_2 = (0{,}2916 \pm 0{,}0035)\,\mathrm{mm}\,,$$
$$l_3 = (0{,}2929 \pm 0{,}0027)\,\mathrm{mm}\,, \quad l_4 = (0{,}2930 \pm 0{,}0022)\,\mathrm{mm}\,.$$

V tomto případě je statistický odhad chyby dostatečně velký, aby pokryl rozdíly jednotlivých měření. Výslednou hodnotu tedy určím jako průměr a chybu spočtu ze statistických chyb těchto čtyř měření. Vychází

$$l = (0{,}2923 \pm 0{,}0014)\,\mathrm{mm}\,.$$

Za střední hodnotu vlnové délky sodíkového dubletu považuji $\lambda_{\mathrm{s}} = 589{,}3\,\mathrm{nm}$) (viz [1]) a dosazením do vztahu (4) získám pro rozdíl vlnových délek

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_{\mathrm{s}}^2}{2l} = (0{,}594 \pm 0{,}003)\,\mathrm{nm}\,, \tag{5}$$

Diskuze: Při měření Michelsonovým interferometrem vychází odhady chyb koeficientů regrese znatelně menší než o kolik se liší výsledky jednotlivých provedených měření. To je pravděpodobně způsobeno tím, že vztahy pro lineární regresi metodou nejmenších čtverců předpokládají mnohem větší přesnost veličiny na jedné z os. V tomto případě to byl počet proužků. Tento předpoklad ale nemohu nijak zaručit, protože je možné, že v některých případech jsem proužky odpočítal chybně a vyskytla se chyba jednoho až několika proužků, která určitě není zanedbatelná. Proto jsme také chybu výsledku odhadoval ne z chyby jednotlivých regresí, ale až z rozdílu výsledných koeficientů.

Další chyba, kterou jsme nijak nezapočítal může být způsobena mechanickým převodem mezi mikrometrickým šroubem a zrcátkem. To, že je tento převod dostatečně lineární, je vidět ze skutečnosti, že bylo možné naměřená data proložit přímkou, ovšem ještě zde zůstává možnost systematické chyby. V případě, že by převod nebyl přesně 1 : 5,2, budou všechny výsledky posunuty. Ovšem porovnáním vlnové délky čáry rtuti s tabulkovou je vidět, že tímto způsobená chyba je mnohem menší než statistická chyba naměřených hodnot.

U Fabryho-Perotova interferometru odpovídají statistické odhady chyb koeficientů velmi dobře rozdílům jednotlivých měření. V tomto případě je totiž přesnou veličinou v lineární regresi počet poloh, ve kterých mají proužky stejnou vzdálenost. Toto celé číslo je v řádu jednotek a skutečně není zatíženo žádnou chybou. Proto zde odhady chyb dobře odpovídají.

ZÁVĚR: Změřil jsme vlnovou délku zelené čáry ve spektru rtuťové výbojky. Hodnota ve vzduchu je

$$\lambda_{\mathrm{Hg}} = (542 \pm 8)\,\mathrm{nm}\,.$$

Tato hodnota odpovídá údajům z [2] (uváděno 546,08 nm).

Pro vlnovou délku světla He-Ne laseru ve vzduchu jsme získal hodnotu

$$\lambda_{\mathrm{l}} = (650 \pm 20)\,\mathrm{nm}\,.$$

Podle literatury [3] má být tato vlnová délka 632,82 nm, čemuž získaný výsledek v rámci chyby odpovídá.

Rozdíl vlnových délek čar v sodíkovém dubletu jsem určil jako

$$\Delta\lambda = (0{,}594 \pm 0{,}003)\,\mathrm{nm}\,,$$

Podle [2] by tato hodnota měla být 0,597 nm, což souhlasí s výsledky mého měření.

LITERATURA:

[1] I. Pelant, J. Fiala, J. Fänhrich, J. Pospíšil: Fyzikální praktikum III. – Optika, Karolinum, Praha 1993
[2] Brož, Voskovec, Valouch: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980
[3] Miroslava Vrbová a kolektiv: Lasery a moderní optika, Prometheus, Praha 1994