Martin Beránek, 2.F, X–11

Úloha 6 – Ohybové jevy v laserovém svazku

Pracovní úkol:

1. Seznamte se s laserovou soupravou a uveďte ji do chodu.
2. Na stínítku se stupnicí zobrazte obrazce vzniklé ohybem na mřížce a proměřte vzdálenost ohybových maxim.
3. Na stínítku zachyťte obrazce vzniklé ohybem na štěrbině a dvojité štěrbině. Ohybové obrazce porovnejte kvalitativně s teoretickými výsledky a odečtěte polohy ohybových minim.
4. Mikroskopem s mikroskopickým okulárem, který předtím okalibrujte, změřte mřížkovou konstantu použité mřížky. Vypočtěte vlnovou délku světla laserového svazku.
5. Z poloh ohybových minim stanovte šířky štěrbin a jejich vzdálenost u dvojité štěrbiny a porovnejte je s hodnotami získanými přímým měřením mikroskopem.

Teorie: Při dopadu rovinné monochromatické vlny na mřížku nebo štěrbinu dochází k Fraunhoferově difrakci. V tomto případě se difrakční obrazec vytváří v nekonečné vzdálenosti, takže je jej možné spojnou čočkou zaostřit na stínítko v ohniskové rovině.

Při difrakci na mřížce jsou výrazná maxima pozorovatelná ve směrech φ_m, pro které platí

$$\sin\varphi_\mathrm{m} = \frac{k\lambda}{d}\,, \tag{1}$$

kde λ je vlnová délka použitého světla, d mřížková konstanta (tedy vzdálenost dvou sousedních štěrbin) a $k \in \mathbb{N}$ určuje řád spektra.

Pokud budu obrazec pozorovat na stínítku vzdáleném l od spojky a vzdálenost dvou maxim řádu k (vpravo a vlevo od nultého maxima) bude x_k, pak mohu podmínku (1) přepsat jako

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x_k}{2l}\right)\right) = \frac{k\lambda}{d}\,, \tag{2}$$

Pokud znám mřížkovou konstantu, mohu tímto způsobem poměrně přesně určit vlnovou délku světla použitého laseru.

Při difrakci na štěrbině je intenzita světla ve směru φ úměrná

$$\left(\frac{\sin\Psi}{\Psi}\right)^2 \qquad \text{a} \qquad \Psi = \pi\frac{a}{\lambda}\sin\varphi\,, \tag{3}$$

kde a je šířka štěrbiny. Mezi úhlem φ a polohou x stopy na stínítku ve vzdálenosti l platí vztah

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{l}\,, \tag{4}$$

přičemž vzdálenost x je počítána od nultého maxima. Maxima nastanou při splnění podmínky

$$\sin\varphi = \frac{2m+1}{2}\,\frac{\lambda}{a} \tag{5}$$

a minima pokud

$$\sin\varphi = m\,\frac{\lambda}{a}\,, \tag{6}$$

přičemž $m \in \mathbb{N}$.

Intenzita světla při difrakci na dvojštěrbině je úměrná výrazu

$$\left(\frac{\sin\Psi}{\Psi}\cdot\cos\left(\pi\frac{d}{\lambda}\sin\varphi\right)\right)^2 \qquad \text{a} \qquad \Psi = \pi\frac{a}{\lambda}\sin\varphi\,, \tag{7}$$

měření	1	2	3	4	5
x_1	0,94	1,64	1,28	1,90	0,68
x_2	7,14	4,72	6,22	5,00	6,84
Δ	6,20	3,08	4,94	3,10	6,16
d [mm]	1,0	0,5	0,8	0,5	1,0
n [mm]	0,1613	0,1623	0,1619	0,1613	0,1623

Tabulka 1 – kalibrace mikroskopu

kde d je vzdálenost středů štěrbin a a jejich šířka. Poloha na stínítku souvisí s úhlem φ opět podle vztahu (4). V tomto případě vznikají navíc maxima způsobená interferencí paprsků z obou štěrbin navzájem. Podmínkou pro jejich vznik je

$$\sin\varphi = m\,\frac{\lambda}{d}\,, \tag{8}$$

Maxima a minima podle vztahů (6) a (7) pak tvoří obálku interferenčního obrazce.

MĚŘENÍ: Nejprve jsem mikroskopem určil rozměry štěrbin a mřížkovou konstantu. Kalibroval jsem jej pomocí sklíčka s vyrytou milimetrovou stupnicí. Polohy kříže v mikroskopu a jim odpovídající vzdálenosti v milimetrech jsou uvedeny v tabulce 1. První dva řádky jsou krajní polohy kříže, d je odpovídající vzdálenost v milimetrech a n délka jednoho dílku mikroskopu spočtená z určitého sloupce.

Chybu nastavení kříže mikroskopu odhaduji na 0,02 dílku stupnice. V případě měřeného rozdílu hodnot to znamená asi jedno procento. Přesnost vrypů na sklíčku neznám, ale budu předpokládat, že je dostatečně vysoká. Z naměřených hodnot vychází průměrná délka jednoho dílku $n = 0{,}1618\,\mathrm{mm}$ a výsledná chyba (odhad disperze hodnot spolu s výše uvedenou chybou nastavení kříže mikroskopu) je pak $\pm 0{,}002$. Skutečná vzdálenost odpovídající jednomu dílku stupnice mikroskopu je tedy

$$n = (0{,}162 \pm 0{,}002)\,\mathrm{mm}\,.$$

Po zkalibrování mikroskopu jsem už mohl přímo určit rozměry mřížky a štěrbin. U mřížky mne zajímá pouze poloha hlavních maxim, takže potřebuji znát pouze mřížkovou konstantu. Výsledky měření šířky 16 vrypů vedle sebe jsou v tabulce 2. Mřížková konstanta d je pak šestnáctina naměřené hodnoty.

měření	1	2	3	4
x_1	1,01	1,29	1,90	1,42
x_2	5,97	6,27	2,93	6,41
Δ	4,96	4,98	4,99	5,03
d [mm]	0,0502	0,0504	0,0505	0,0509

Tabulka 2 – mřížková konstanta

Chybu určení rozdílu na stupnici mikroskopu odhaduji opět na $\pm 0{,}04$ dílku. Spolu s chybou kalibrace mikroskopu vychází výsledná chyba mřížkové konstanty 2 %. Tedy

$$d = (0{,}051 \pm 0{,}001)\,\mathrm{mm}\,.$$

Pro další měření jsme si vybral štěrbiny označené A a C. Výsledky měření jejich šířky mikroskopem jsou v tabulkách 3 a 4. Chybu počítám z odhadu disperze naměřených hodnot (šířka štěrbiny je v různých místech mírně odlišná), z výše uvedené chyby kalibrace mikroskopu a z předpokládané chyby $\pm 0{,}02$ dílku při nastavování kříže na hrany štěrbiny.

měření	1	2	3	4	5
x_1	3,56	3,44	3,81	3,40	3,70
x_2	4,36	4,22	4,63	4,17	4,45
Δ	0,80	0,78	0,82	0,77	0,75
a_A [mm]	0,130	0,126	0,133	0,125	0,122

Tabulka 3 – štěrbina A

měření	1	2	3	4	5
x_1	2,79	3,56	3,48	2,33	2,05
x_2	5,62	6,40	6,28	5,12	4,90
Δ	2,83	2,84	2,80	2,79	2,85
a_C [mm]	0,458	0,460	0,454	0,452	0,462

Tabulka 4 – štěrbina C

Odhad disperze měření šířky štěrbiny A je $\tilde{\sigma}^\star = 0{,}0044\,\mathrm{mm}$. Spolu s chybami měření vychází šířka štěrbiny

$$a_\mathrm{A} = (0{,}127 \pm 0{,}006)\,\mathrm{mm}\,.$$

Obdobně jako v předchozím případě určím odhad disperze $\tilde{\sigma}^\star = 0{,}0042\,\mathrm{mm}$ a šířka štěrbiny pak vychází

$$a_\mathrm{C} = (0{,}46 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}\,.$$

Dále jsem mikroskopem určoval šířky a vzdálenost dvojštěrbin A a C. Pro každou dvojštěrbinu jsem provedl tři měření, což je pro statistické zpracování málo. Budu tedy počítat s chybou ±0,04 dílku stupnice mikroskopu na všechna určení rozměrů a s chybou kalibrace mikroskopu ±0,002 mm/dílek. Naměřené hodnoty pro obě dvojštěrbiny jsou v tabulce 5. $a_{\mathrm{dA}1}$ a $a_{\mathrm{dA}2}$ jsou šířky jednotlivých štěrbin u dvojštěrbiny A, d_A je vzdálenost štěrbin a následující tři sloupce jsou odpovídající hodnoty pro dvojštěrbinu C. Hodnoty jsou udávány v počtu dílků stupnice mikroskopu.

měření	$a_{\mathrm{dA}1}$	$a_{\mathrm{dA}2}$	d_A	$a_{\mathrm{dC}1}$	$a_{\mathrm{dC}2}$	d_C
1	0,76	0,77	3,79	1,18	1,21	7,46
2	0,79	0,70	3,75	1,20	1,25	7,43
3	0,75	0,69	3,71	1,24	1,23	7,49
průměr	0,77	0,72	3,75	1,21	1,23	7,46

Tabulka 5 – dvojštěrbiny A a C

Po vynásobení kalibrační konstantou n a započítání chyb měření podle předchozího odstavce vyjdou výsledné hodnoty v milimetrech

$$a_{\mathrm{dA}1} = (0{,}124 \pm 0{,}008)\,\mathrm{mm}\,, \qquad a_{\mathrm{dA}2} = (0{,}117 \pm 0{,}008)\,\mathrm{mm}\,, \qquad d_\mathrm{A} = (0{,}61 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}\,,$$
$$a_{\mathrm{dC}1} = (0{,}195 \pm 0{,}009)\,\mathrm{mm}\,, \qquad a_{\mathrm{dC}2} = (0{,}199 \pm 0{,}009)\,\mathrm{mm}\,, \qquad d_\mathrm{C} = (1{,}21 \pm 0{,}02)\,\mathrm{mm}\,.$$

Druhou částí měření je zkoumání difrakčních obrazců. Obrazec se promítal buďto na stínítko, nebo byl zaznamenáván elektronickým snímačem. Přesnou vzdálenost spojky od stínítka, ve které je obrazec zaostřen se mi nepodařilo určit, takže jsem zvolil $l = (1000 \pm 5)\,\mathrm{mm}$. Tato vzdálenost nezpůsobila žádné znatelné rozostření, jak je vidět z následujících grafů.

Nejprve jsem zaznamenal maxima ohybového obrazce na mřížce. Vzdálenosti maxim odpovídajícího řádu na levé a pravé straně jsou uvedeny v tabulce 6. Odpovídající úhly jsou určeny podle vztahu (4). Váha w je převrácenou hodnotou chyby dané nepřesností odečtení vzdálenosti maxim (odhaduji na $\pm 2\,\mathrm{mm}$) a nepřesností určení vzdálenosti stínítka (proto je také pro vzdálenější maxima váha vyšší a chyba menší).

řád (k)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k [mm]	24	48	71	94	119	142	166	191	215	239
$(\sin\varphi)/k$	0,0120	0,0120	0,0118	0,0117	0,0119	0,0118	0,0118	0,0119	0,0119	0,0119
w	11	21	30	38	46	52	59	65	70	75

Tabulka 6 – maxima ohybového obrazce na mřížce

Vážený průměr hodnot z druhého řádku tabulky (tedy hodnota zlomku λ/d) vychází $\lambda/d = 0{,}0119$. Statistický rozptyl naměřených hodnot je zanedbatelně malý a chyba způsobená nepřesným odečtením poloh maxim je pro vzdálenější maxima menší než 2 %. Výslednou hodnotu zlomku tedy odhaduji na

$$\frac{\lambda}{d} = 0{,}0119 \pm 0{,}0002\,.$$

Pokud použiji dříve změřenou mřížkovou konstantu, mohu určit vlnovou délku laseru

$$\lambda = (610 \pm 20)\,\mathrm{nm}\,.$$

Interferenční obrazec štěrbiny A je v grafu 1. Graf je naměřen elektronickým snímačem a získané hodnoty jsme pouze přepočítal z polohy na stínítku na sinus úhlu (vzhledem k přesnosti měření a vzhledem k malým úhlům zde mohu stejně dobře předpokládat, že daná hodnota není sinus, ale přímo uvažovaný úhel). Dále jsem celý obrazec posunul tak, aby nulté maximum leželo v místě $\varphi = 0$.

Extrémy jsou v tomto obrazci velmi pozvolné, takže už odečtení prvního maxima a minima je zatíženo velkou chybou. Rozsah úhlů, ve kterých byla naměřena stejná intenzita je pro maximum i minimum přibližně 0,001. Střední úhel odpovídající prvnímu minimu je $\varphi_1 = 0{,}0073$ a prvnímu maximu pak $\varphi_2 = 0{,}0051$. Chybu odhadnu na polovinu „šířky minima“ (resp. maxima), tedy $\pm 0{,}0005$. Podle vztahů (5) a (6) pak pro podíl λ/a vychází $0{,}0051 \pm 0{,}0005$ (z polohy minima), resp. $0{,}0048 \pm 0{,}0003$ z polohy maxima. Za použití výše určené vlnové délky laseru vychází šířka štěrbiny $(0{,}12 \pm 0{,}02)$ mm, resp. $(0{,}13 \pm 0{,}01)$ mm (z polohy maxima). Další maxima a minima už jsou příliš málo výrazné.

Obrazec odpovídající druhé dvojštěrbině je v grafu 2. První minimum je zde dostatečně úzké. Jeho úhel je $0{,}00134 \pm 0{,}00002$. Chyba je v tomto případě velmi malá a může již být způsobena i nepřesným určením polohy detektoru. První maximum je poněkud širší a odpovídá mu úhel $0{,}0019 \pm 0{,}001$. Z dříve změřené vlnové délky světla mohu opět určit šířku štěrbiny. Zde se výrazně projeví nepřesnost λ. Šířka určená na základě polohy prvního minima vychází $(0{,}46 \pm 0{,}02)$ mm.

Graf 3 odpovídá dvojštěrbině A. V tomto případě existují tři velmi ostrá maxima. Jim odpovídající úhly jsou uvedeny v tabulce 7.

řád maxima	1.	2.	3.
$\sin\varphi$	0,00097	0,00199	0,00304
λ/d_A	0,00097	0,00100	0,00101

Tabulka 7 – maxima dvojštěrbiny A

Průměrná hodnota zlomku vychází 0,00099. Chybu zde dokážu pouze odhadnout. Maxima jsou dostatečně ostrá, takže ji bude působit spíš nepřesnost polohy detektoru, která je v řádu 0,00001 rad, tedy chyba přibližně 1 %. Podle vlnové délky mohu určit vzdálenost štěrbin dvojštěrbiny. Vychází $d_\mathrm{A} = (0{,}62 \pm 0{,}02)$ mm.

Poloha minim daných vztahem (6) se dá určit s menší přesností, protože tyto minima jsou hodně neostrá. Odečtená hodnota s odhadnutou chybou je $0{,}0054 \pm 0{,}0002$. Z toho mohu spočítat šířku jedné štěrbiny. Vychází $a_\mathrm{dA} = (0{,}113 \pm 0{,}008)$ mm.

Poslední měřenou clonou je dvojštěrbina označená C. Difrakční obrazec je v grafu 4. Opět je možné dost přesně odečíst polohu několika maxim – konkrétní hodnoty jsou v tabulce 8.

řád maxima	1.	2.	3.
$\sin\varphi$	0,00050	0,00101	0,00150
λ/d_C	0,00050	0,00050	0,00050

Tabulka 8 – maxima dvojštěrbiny C

Chyba úhlu je stejně jako v předchozím případě v řádu 0,00001 rad, takže z toho vychází relativní chyba opět přibližně 1 %. Po dosazení vlnové délky pak vyjde $d_\mathrm{C} = (1{,}22 \pm 0{,}05)$ mm.

Minimum, ze kterého by bylo možné určit šířku štěrbiny není v difrakčním obrazci z této dvojštěrbiny zřetelné.

Diskuze: Obě použité metody – přímé měření mikroskopem se stupnicí a zkoumání difrakčních obrazců – dávají výsledky se řádově stejnou chybou. Při menších rozměrech štěrbin a u dvojštěrbin je ale měření difrakčních obrazců mírně přesnější. Ovšem v obou případech je potřeba mít aparaturu dostatečně přesně zkalibrovanou. V případě přímého měření mikroskopem to bylo provedeno pomocí sklíčka s milimetrovým měřítkem, o kterém jsme předpokládal, že je dostatečně přesné. V případě měření laserem je touto kalibrací znalost přesné vlnové délky laseru. Já jsem ale používal naměřenou hodnotu s poměrně velkou chybou (3 %), takže to se nepříznivě projevilo na hodnotách získaných nepřímým měřením. V rámci přesnosti se ovšem hodnoty získané různými metodami dobře shodují.

Grafy difrakce na štěrbině (graf 1 a 2) odpovídají dobře teoretickému průběhu podle vztahu (3). V grafech difrakce na dvojštěrbině (3 a 4) jsou dobře zřetelné maxima a minima způsobená interferencí vln z jednotlivých štěrbin. V případě štěrbiny A je také vidět obálka daná funkcí $\sin^2 \Psi/\Psi^2$. Difrakční obrazec dvojštěrbiny C je ale už velmi blízko rozlišovací schopnosti detektoru a po několika maximech je další průběh dán spíše šumem.

Difrakční obrazec získaný mřížkou je v grafu 5. Díky velkému množství vrypů jsou pozorovatelné pouze extrémy dané podmínkou (1). Ostatní maxima jsou pod rozlišovací schopností detektoru. Naměřené „rozdvojení“ maxim může být způsobeno chybami v samotné mřížce. Při měření pod mikroskopem bylo vidět minimálně jednu dvojici vrypů, jejichž vzdálenost byla výrazně odlišná.

ZÁVĚR: Okalibroval jsem stupnici mikroskopu na $n = (0{,}162 \pm 0{,}002)$ mm/dílek a určil jsme vlnovou délku laserového světla $\lambda = (610 \pm 20)$ nm.

Difrakční obrazce štěrbin a dvojštěrbin odpovídají kvalitativně teoretickým průběhům. Obrazec vytvořený mřížkou je mírně zkreslený, což může být způsobeno chybami v samotné mřížce.

Rozměry štěrbin získané přímým měřením a spočítané z difrakčních obrazců se v rámci chyby shodují.

LITERATURA:

[1] I. Pelant, J. Fiala, J. Fänhrich, J. Pospíšil: Fyzikální praktikum III. – Optika, Karolinum, Praha 1993

[2] B. Klimeš, J. Kracík, A. Ženíšek: Základy fyziky II., Academia, Praha 1972