Martin Beránek, 2.F, X–11

# Úloha 21 – Koherentní optický procesor

PRACOVNÍ ÚKOL:

1. Na optickém stole je sestaven Koherentní optický procesor. Na obr. v „Pokynech měření“ je vyznačeno schematické uspořádání a vyznačeny ohniskové délky čoček, které jsou v úloze k dispozici. Přeměřte vzdálenosti jednotlivých optických elementů. Ověřte, zda čočky Č1 a Č2 zachovávají rovnoběžnost paprsků. Spočtěte a ověřte rozšíření paprsku použitým teleskopem.
2. Pozorujte fourierovský obraz síťky, soustavy rovnoběžných pruhů a čtvercového otvoru umístěných v rovině P1. Změřte jeho parametry v rovinách P2 a P4.
3. Spočtěte a ověřte:
   - Zvětšení geometrického obrazu předmětu umístěného v rovině P1 v rovině P3. Předmět změřte mikroskopem, který je v úloze č. 6 nebo č. 30.
   - Zvětšení fourierovského obrazu vzniklého v rovině P2 v rovině P4.
4. Po dohodě s vyučujícím vyberte a kvalitativně ověřte některou z vlastností Fourierovy transformace, které jsou uvedeny na www.
5. V rovině P1 umístěte vybraný předmět. Do roviny P2 vkládejte různé filtry a zkoumejte jejich vliv na geometrický obraz v rovině P3. Pozorované jevy vysvětlete.

TEORIE: Monochromatická světelná vlna vycházející z předmětu se dá chápat jako superpozice rovinných vln. Tyto vlny se podle pravidel geometrické optiky zobrazí do jednotlivých bodů v ohniskové rovině použité spojné čočky. Poloha bodu na stínítku v ohniskové rovině je přímo úměrná příslušným souřadnicím vlnového vektoru s koeficientem $2\pi/f\lambda$. Koeficient $2\pi$ se vyskytuje přímo ve vyjádření Fourierovy transformace, takže abych dostal příslušné koeficienty $f_x$ a $f_y$, musím změřenou polohu na stínítku vydělit koeficientem $f\lambda$, kde $f$ je ohnisková vzdálenost použité čočky a $\lambda$ vlnová délka světla.

Dvourozměrná Fourierova transformace $\mathcal{F}\{\boldsymbol{g}\}$ funkce $\boldsymbol{g}(x,y)$ je dána předpisem

$$\mathcal{F}\{\boldsymbol{g}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{g}(x,y)\exp(-i2\pi(xf_x + yf_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \tag{1}$$

Zintegrováním rovnice (1) lze určit, jak bude vypadat Fourierova transformace různých předmětů. Pro čtvercový otvor s délkou strany $a$ vychází podél osy

$$\boldsymbol{G}(x) = \frac{\sin(\pi a f_x)}{\pi f_x} \tag{2}$$

a pro pozorovanou intenzitu na stínítku tedy

$$I(x) \sim \frac{\lambda^2 f^2}{\pi^2}\,\frac{\sin^2(\pi a x/\lambda f)}{x^2}\,. \tag{3}$$

Polohu maxim naleznu zderivováním a porovnáním nulou. Podmínka extrému je

$$\alpha x\sin(\alpha x)\cos(\alpha x) = \sin^2(\alpha x)\,, \qquad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda f}\,. \tag{4}$$

Minima nastávají při $\sin(\alpha x) = 0$ (s výjimkou případu, kdy $x = 0$), takže nulté maximum je při $x = 0$ a polohy $x$ ostatních maxim musí splňovat podmínku

$$\alpha x = \mathrm{tg}(\alpha x)\,. \tag{5}$$

Numerickým řešením získám hodnoty uvedené v tabulce 1 (uvádím jen nezáporné, další řešení mají opačné znaménko).

| maximum č. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha x$ | 0 | 4,4934 | 7,7253 | 10,904 | 14,066 | 17,221 | 20,371 |

**Tabulka 1 – maxima Fourierovy transformace čtverce**

Fourierovou transformací soustavy svislých štěrbin získám opět obrazec skládající se z výrazných maxim. Podle [1] se hlavní maxima od jednotlivých štěrbin objeví na stínítku na vodorovné ose a pro jejich polohu platí

$$x_j = \frac{\lambda f}{b}\, j\,, \tag{6}$$

kde $b$ je vzdálenost sousedních štěrbin a $j \in \mathbb{Z}$. Intenzity těchto maxim budou navíc modulovány a minimum se objeví tehdy, když

$$\frac{aj}{b} = \pm k\,, \qquad k \in \mathbb{N}\,. \tag{7}$$

Tato podmínka pravděpodobně nebude pro hlavní maxima splněna přesně, ale dá se odhadnout poloha prvního místa s minimální intenzitou $x_{\min}$ vzhledem k nultému maximu a ze vztahů (6) a (7) pak plyne

$$a = \frac{\lambda f}{x_{\min}}\,, \tag{8}$$

čímž mám určenou šířku štěrbiny. Ze vztahu (6) a vzdálenosti sousedních maxim $\Delta x$ mohu určit vzdálenost štěrbin

$$b = \frac{\lambda f}{\Delta x}\,. \tag{9}$$

Situace pro stínítko ve tvaru mřížky je dle [1] obdobná. Podél obou os odpovídá vzniklý obrazec takovému, který by vytvořila soustava štěrbin kolmých k této ose. Rozměr čtvercového otvoru mřížky tedy zjistím podle vztahu (8) měřením ve směru obou os. Obdobně ze vztahu (9) určím vzdálenost otvorů mřížky.

MĚŘENÍ: Vzdálenosti rovin P1 a P2 od čočky Č by měly odpovídat její ohniskové vzdálenosti $f = 100\,\mathrm{cm}$. Měřením jsem získal hodnoty $|P_1\mathrm{Č}| = 97{,}5\,\mathrm{cm}$ a $|\mathrm{Č}P_2| = 98{,}5\,\mathrm{cm}$. Chybu v obou případech odhaduji na $\pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Tyto vzdálenosti nebylo možné nijak korigovat a subjektivní dojem byl, že obraz v rovině P2 je zaostřený dostatečně.

Soustava čoček Č1 a Č2 bude rozšiřovat svazek tehdy, když budou jejich ohniska splývat. Potom bude paprsek rozšířen v poměru ohniskových vzdáleností jednotlivých čoček. Při použití ohniskových vzdáleností z [1] vyjde, že svazek by se měl rozšířit přibližně 7,9 krát. Tento údaj jsme se pokusil ověřit měřením, ovšem vzhledem k nízké přesnosti jde spíše o řádové potvrzení. Průměr svazku vycházejícího z laseru je $(2 \pm 1)\,\mathrm{mm}$. Poté, co projde čočkami je jeho průměr $(24 \pm 1)\,\mathrm{mm}$.

Dále jsme změřil vzdálenost těchto dvou čoček. Výsledek $d_{12} = (32{,}5 \pm 1)\,\mathrm{cm}$ neodpovídá přesně teoretické hodnotě. Ovšem proměřením šířky svazku ve dvou místech vzdálených 140 cm jsme ověřil, že svazek má rozbíhavost menší než asi 1 mrad.

Při odečítání vzdáleností maxim v rovině P2 odhaduji chybu na $\pm 0{,}05\,\mathrm{mm}$. Pro ověření této hodnoty jsme vždy provedl několik měření a v případě, že se lišili více, jsme tento odhad chyby ještě upravil. Měření v rovině P4 nemá z hlediska přesnosti výsledků význam. Největším zdrojem chyb je totiž „rozmazání“ maxim a z toho plynoucí nepřesnost při odečítání vzdáleností. V rovině P4 je šířka maxim větší a navíc se přidá chyba určení zvětšení a také je v této rovině možné odečítat jen maxima nižších řádů.

Pro **obdélníkový otvor** jsem v ohniskové rovině čočky (dle [1] rovina P2) naměřil mezi maximy šestého řádu vzdálenost $(17{,}1 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$. Podle údajů v tabulce 1 mohu určit $\alpha_1 = (2{,}38 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}^{-1}$. Po dosazení vlnové délky laseru $\lambda = 543\,\mathrm{nm}$ a ohniskové vzdálenosti čočky $f = 100\,\mathrm{cm}$ (oba údaje podle [1]) vychází jeden rozměr otvoru

$$l_1 = (0{,}412 \pm 0{,}003)\,\mathrm{mm}\,.$$

Po otočení stínítka jsme obdobně určil i druhý rozměr. Ze vzdálenosti maxim pátého řádu jsem získal hodnotu $\alpha_2 = (1{,}778 \pm 0{,}005)\,\mathrm{mm}^{-1}$, což odpovídá rozměru

$$l_2 = (0{,}307 \pm 0{,}002)\,\mathrm{mm}\,.$$

U obrazce vytvořeného stínítkem se **soustavou svislých štěrbin** jsme změřil vzdálenost maxim prvního řádu a určil jsem $\Delta x = (5{,}93 \pm 0{,}05)\,\mathrm{mm}$. Dosazením do vztahu (9) mohu určit vzdálenost štěrbin

$$b = (0{,}092 \pm 0{,}001)\,\mathrm{mm}\,.$$

Vzdálenost prvního minima modulující funkce od nultého maxima jsem odhadl na $(25 \pm 3)\,\mathrm{mm}$. Podle vztahu (8) by pak měla být šířka otvorů

$$a = (22 \pm 3)\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Obrazec vytvořený **mřížkou** jsme měřil pro dva směry. Získané výsledky podle toho indexuji čísly 1 a 2. Z měření vzdálenosti druhých a třetích maxim vychází pro sousední $\Delta x_1 = (2{,}3 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$ a z toho podle (9) vzdálenost otvorů mřížky

$$b_1 = (0{,}23 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}\,.$$

Pro druhý rozměr vychází $\Delta x_2 = (2{,}4 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$ a tedy

$$b_2 = (0{,}23 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}\,.$$

Pro určení vzdálenosti minim jsme použil lineární regresi. Zjištěné polohy minim několika řádů jsou v tabulce 2. Po provedení lineární regrese vyjde $x_{\mathrm{min}1} = (5{,}54 \pm 0{,}09)\,\mathrm{mm}$ a $x_{\mathrm{min}2} = (5{,}14 \pm 0{,}04)\,\mathrm{mm}$. Z toho určím rozměry otvorů mřížky

$$a_1 = (0{,}098 \pm 0{,}002)\,\mathrm{mm} \qquad \text{a} \qquad a_2 = (0{,}106 \pm 0{,}001)\,\mathrm{mm}\,.$$

| řád | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| směr 1 [mm] | $-16{,}5$ | $-11{,}0$ | $-6{,}0$ | 6,0 | 11,0 | 17,5 | 21,5 |
| směr 2 [mm] | $-15{,}5$ | $-10{,}5$ | $-5{,}5$ | 5,0 | 10,5 | 15,5 | 20,0 |

**Tabulka 2 – minima Fourierovy transformace mřížky**

Z obrazce vytvořeného mřížkou jsme se také pokusil určit zvětšení v rovině P4 oproti rovině P2. Pro vzdálenost sousedních maxim ve směru 1 vyšlo $d = (14{,}1 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$ a porovnáním s $\Delta x_1$ vychází zvětšení asi $6{,}1 \pm 0{,}3$. V kolmém směru je vzdálenost sousedních maxim na stínítku také $(14{,}1 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$ a zvětšení vychází $5{,}9 \pm 0{,}3$. Jako odhad skutečného zvětšení použiji průměr, tedy $Z_{24} = 6{,}0 \pm 0{,}3$.

Zvětšení mezi rovinami P2 a P3 jsem určil pomocí stínítka ve tvaru čtverce se stranou délky $(2{,}6 \pm 0{,}2)\,\mathrm{mm}$ (měřeno posuvným měřítkem). Velikost obrazu v rovině P3 vychází $(7{,}04 \pm 0{,}05)$ (průměr tří naměřených hodnot) a z toho zvětšení $Z_{23} = 2{,}7 \pm 0{,}2$.

Skutečné parametry stínítek jsme pak měřil mikroskopem. Při kalibraci jsme zjistil rozměr milimetrové úsečky v dílcích stupnice. Z toho plyne převodní koeficient

$$u = (6{,}25 \pm 0{,}02)\,\mathrm{mm}^{-1}$$

spočítaný na základě tří měření.

Pro rozměry obdélníkového otvoru vychází z průměru tří měření

$$l'_1 = (2{,}95 \pm 0{,}03)\,\text{dílku} = (0{,}472 \pm 0{,}006)\,\mathrm{mm} \quad \text{a} \quad l'_2 = (2{,}03 \pm 0{,}03)\,\text{dílku} = (0{,}325 \pm 0{,}006)\,\mathrm{mm}\,.$$

U stínítka se svislými čarami jsme měřil šířku sedmi čar. Průměrná hodnota na jednu čáru pak vychází

$$b' = (0{,}101 \pm 0{,}001)\,\mathrm{mm}\,.$$

Šířka jedné štěrbiny je $(0{,}083 \pm 0{,}008)\,\mathrm{mm}$. Protože Fourierova transformace negativu se od pozitivu v pozorovatelné intenzitě světla liší pouze poblíž středu, mohu zde brát také šířku tmavého pole, která je tedy

$$a' = (18 \pm 9)\,\mu\mathrm{m}\,.$$

Rozměry mřížky jsme určoval z velikosti tří sousedních čtverečků a jako průměr tří měření. U měření rozměrů otvoru mřížky je největší chyba dána tím, že strany otvorů nejsou rovnoběžné a nelze tedy přesně určit jednu hodnotu šířky. Výsledné hodnoty jsou

$$a'_1 = (0{,}15 \pm 0{,}08)\,\mathrm{mm}\,, \qquad b'_1 = (0{,}25 \pm 0{,}02)\,\mathrm{mm}\,,$$
$$a'_2 = (0{,}14 \pm 0{,}08)\,\mathrm{mm}\,, \qquad b'_2 = (0{,}25 \pm 0{,}02)\,\mathrm{mm}\,.$$

Z vlastností Fourierovy transformace jsme ověřil následující

- **Podobnostní teorém** – bylo pozorováno zmenšování rozměrů obrazce při zvětšování rozměrů stínítka a naopak.
- **Transformace konvoluce** – byla pozorována konvoluce v rovině P2 při vložení dvou stínítek do roviny P1 a dále při zpětné transformaci v rovině P3 při vložení druhého stínítka do roviny P2.

Z jevů způsobených filtry v rovině P2 byl pozorován vliv horní a dolní propusti, kdy při vložení dolní propusti jsou odstíněny složky modulující hrany obrazu a výsledný obraz v rovině P3 je pak „rozmazaný“. Při vložení horní propusti se naopak odfiltrují složky tvořící základní plochy obrazu a zbudou ty, které modulují hrany. Proto jsou v rovině P3 vidět pouze hrany obrazu.

Dále byl pozorován vliv úzké štěrbiny vložené do Fourierova obrazce tvořeného mřížkou. Vybráním svislého, vodorovného nebo diagonálního proužku obrazce vznikne obrazec odpovídající Fourierově transformaci soustavy štěrbin a proto se po zpětné transformaci na stínítku P3 zobrazí místo mřížky jen štěrbiny.

DISKUZE: Jednotlivé rozměry stínítek získané měřením Fourierovy transformace a přímým měřením mikroskopem se většinou liší o víc než by vycházelo z chyby měření a navíc tak, že hodnoty získané z Fourierovy transformace vychází nižší než z přímého měření. To pravděpodobně znamená, že při měření a zpracování výsledků Fourierovou transformací někde dochází k systematické chybě. V [1] je uvedena vlnová délka použitého He-Ne laseru $\lambda = 543\,\mathrm{nm}$, ovšem podle [2] září tento laser ve viditelné části spektra na přechodu 3s–2p, který odpovídá vlnové délce 633 nm. Po dosazení této vlnové délky a skutečně změřené vzdálenosti stínítka P2 od čočky vychází součin $\lambda f = 623{,}5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}^2$ a výsledky je tedy potřeba vynásobit koeficientem $C = 1{,}148$.

Po této úpravě získám pro obdélník

$$l_1 = (0{,}473 \pm 0{,}003)\,\mathrm{mm}\,, \qquad l_2 = (0{,}353 \pm 0{,}002)\,\mathrm{mm}\,,$$

pro soustavu štěrbin

$$a = (25 \pm 3)\,\mu\mathrm{m}\,, \qquad b = (0{,}106 \pm 0{,}001)\,\mathrm{mm}$$

a pro mřížku

$$a_1 = (0{,}113 \pm 0{,}002)\,\mathrm{mm}\,, \qquad b_1 = (0{,}26 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}\,,$$
$$a_2 = (0{,}122 \pm 0{,}001)\,\mathrm{mm}\,, \qquad b_2 = (0{,}26 \pm 0{,}01)\,\mathrm{mm}\,.$$

Je vidět, že výsledky nyní odpovídají přímému měření mnohem lépe. Jediná příliš velká odchylka je u jednoho rozměru obdélníkového stínítka a zde je možné uvažovat například vliv toho, že stínítko nemá přesně obdélníkový tvar.

ZÁVĚR: Ověřil jsme, že svazek dopadající na stínítko je dostatečně přesně rovnoběžný a po dosazení vlnové délky laseru podle [2] vychází dobrá shoda mezi rozměry stínítek plynoucími ze tvaru Fourierovy transformace a z přímého měření.

Veškeré pozorované efekty na optickém procesoru kvalitativně odpovídají předpokládaným vlastnostem Fourierovy transformace.

LITERATURA:

[1] elektronické texty k úlohám praktika
[2] Miroslava Vrbová a kolektiv: Lasery a moderní optika, Prometheus, Praha 1994