Martin Beránek, 2.F, X–11

Úloha 2 – Měření parametrů zobrazovacích soustav

Pracovní úkol:

1. Změřte ohniskovou vzdálenost ploskovypouklé čočky jednak Besselovou metodou, jednak metodou dvojího zvětšení.
2. Užitím goniometrie určete vzdálenost hlavních rovin čočky měřené v bodě 1 a rozhodněte, lze-li ji považovat za tenkou čočku. Odhadněte chybu, které se dopouštíme při měření ohniskové vzdálenosti Besselovou metodou.
3. Na základě výsledků získaných v obou předchozích bodech diskutujte, která z uvedených metod měření ohniskové vzdálenosti je v uvedeném měření přesnější.
4. Změřte kulovou vadu vyšetřované ploskovypouklé čočky v obou směrech pro dvě vzdálenosti předmětu $a = 30\,\mathrm{cm}$ a $a = 60\,\mathrm{cm}$. Získané výsledky zpracujte graficky a porovnejte.
5. Určete vzdálenost hlavních rovin velmi tlusté ploskovypouklé čočky změřením vzdálenosti uzlových bodů. Proveďte diskuzi přesnosti měření. Ze známé tloušťky čočky a vzdálenosti hlavních rovin určete index lomu skla.

Teorie: Zobrazovací rovnice čočky

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

má pro pevný součet vzdáleností $k = a + a'$ při splnění podmínky $k > 4f$ dvě řešení (a_1 a a_2). Tato dvě řešení jsou položena symetricky kolem bodu $k/2$ a platí tedy

$$a_1 = a_2' \qquad \text{a} \qquad a_1' = a_2\,. \tag{2}$$

Pro pevnou vzdálenost předmětu a obrazu mohu najít dvě polohy čočky, při kterých je obraz ostrý. Vzdálenosti čočky od předmětu budou (BÚNO tak, že $a < a'$ a už bez indexů) a a a'. Jejich rozdíl mohu jednoduše změřit a označím jej Δ. Pokud uvažuji tenkou čočku, bude pro vzdálenost předmětu a obrazu platit $D = a + a'$. Z toho mohu určit

$$2a = D - \Delta \qquad \text{a} \qquad 2a' = D + \Delta\,. \tag{3}$$

Ze zobrazovací rovnice (1) vyjádřím

$$f = \frac{aa'}{a + a'} \tag{4}$$

a dosazením (3) do (4) získám vztah pro určení ohniskové vzdálenosti

$$f = \frac{D^2 - \Delta^2}{4D}\,. \tag{5}$$

Pokud čočku nelze považovat za tenkou, potřebuji znát ještě vzdálenost hlavních rovin δ. V tomto případě platí $D = a + a' + \delta$ a vztah (5) je třeba upravit na

$$f = \frac{(D - \delta)^2 - \Delta^2}{4(D - \delta)}\,. \tag{6}$$

Pro určení vzdálenosti hlavních rovin čočky využívám skutečnosti, že při otáčení čočky kolem předmětového uzlového bodu si dopadající a vycházející paprsky zachovávají svůj směr. Změřením potřebného posunu pro čočku otočenou o 180° určím vzdálenost uzlových bodů a tedy i vzdálenost hlavních rovin, která je shodná.

Podle [1] platí mezi tloušťkou plankonvexní d čočky a vzdáleností jejích hlavních rovin δ vztah

$$\delta = \left(1 - \frac{1}{n}\right) d\,, \tag{7}$$

kde n je index lomu skla čočky.

Jinou metodou určení ohniskové vzdálenosti je metoda dvojího zvětšení. Ze zobrazovací rovnice (1) a ze skutečnosti, že paprsek procházející předmětovým uzlovým bodem vychází pod stejným úhlem z obrazového předmětového bodu plyne vztah

$$\frac{y'}{y} f = \frac{a'}{a} f = a' - f\,, \tag{8}$$

kde y, resp. y' je velikost předmětu, resp. obrazu. Pokud změřím zvětšení y'/y pro dvě různé vzdálenosti obrazu a', mohu vyjádřit ohniskovou vzdálenost jako

$$f = \frac{a'_2 - a'_1}{(y'/y)_2 - (y'/y)_1}\,. \tag{9}$$

Dále jsem určoval kulovou vadu použité čočky. Pro měření paprsků s různými úhly je čočka vybavena clonou v podobě mezikruží s několika různými poloměry. Jedním potřebným údajem je místo, kde lze získat ostrý obraz pro paraxiální paprsky. Polohu tohoto místa označím a'_{p}. Dále jsme určoval polohu ostrého obrazu pro paprsky, které procházely čočkou ve střední vzdálenosti h od středu. Kulovou vadu pak charakterizuje vzdálenost

$$\Delta a'(h) = a'_{\mathrm{p}} - a'(h)\,. \tag{10}$$

Podle [1] lze závislost na h aproximovat vztahem

$$\Delta a' = K h^2\,. \tag{11}$$

MĚŘENÍ: Naměřené vzdálenosti jsou uvedeny v tabulce 1. Hodnota D je odečtena na optické lavici a může být zatížena určitou systematickou chybou způsobenou rozdílem skutečné polohy stínítka (předmětu) a rysky na spodní části stojanu. Navíc poloha obrazu zůstávala stále stejná, takže chybu odhaduji minimálně na $\pm 0{,}1 cm$. Hodnota Δ je rozdíl dvou poloh čočky a předpokládám, že zde se vyskytují pouze náhodné chyby. Rozdíl $a_2 - a_1$ použitý při metodě dvojího zvětšení je zcela stejný údaj jako Δ. Zvětšení jsem měřil mikrometrickým posunem rysky na stínítku, ovšem velikost předmětu předpokládám rovnu uváděné hodnotě 10,0 mm. Opět tedy budu předpokládat možnou odchylku y velikosti $\pm 0{,}005$ cm.

D [cm]	Δ [cm]	$a_2 - a_1$ [cm]	$(y'/y)_1$	$(y'/y)_2$	f_{Z} [cm]	f_{B} [cm]
110,0	68,9	68,9	4,32	0,22	16,80	16,71
105,0	63,3	63,3	4,05	0,24	16,61	16,71
100,0	57,7	57,7	3,72	0,26	16,68	16,68
95,0	51,9	51,9	3,40	0,29	16,69	16,66
90,0	45,8	45,8	3,07	0,31	16,59	16,67
85,0	39,4	39,4	2,71	0,36	16,77	16,68

Tabulka 1 – ohnisková vzdálenost čočky

Hodnoty f_{Z}, resp. f_{B} jsou ohniskové vzdálenosti spočtené metodou dvojího zvětšení, resp. Besselovou metodou. Statistický odhad odchylky f_{Z} je $\pm 0{,}08$ cm a stejně velkou odchylku způsobí možná nepřesnost velikosti předmětu. Ohnisková vzdálenost určená metodou dvojího zvětšení je tedy

$$f_{\mathrm{Z}} = (16{,}7 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}\,.$$

Statistický odhad odchylky f_{B} je pouze 0,02 cm, k tomu přibude odchylka způsobená výše zmíněnými statistickými chybami, která činí přibližně 0,04 cm a ohnisková vzdálenost za předpokladu, že se jedná o tenkou čočku je

$$f_{\mathrm{B}} = (16{,}69 \pm 0{,}06)\,\mathrm{cm}\,.$$

Měřením na goniometru jsem získal hodnoty uvedené v tabulce 2.

měření	1	2	3	4	prům.
x_1 [cm]	2,05	2,07	2,06	2,07	2,06
x_2 [cm]	1,65	1,68	1,67	1,69	1,67

Tabulka 2 – polohy uzlových bodů

Z rozdílu poloh uzlových bodů vychází vzdálenost hlavních rovin

$$\delta = (0{,}39 \pm 0{,}4)\,\mathrm{cm}\,.$$

Je tedy vidět, že v rámci přesnosti výše uvedených měření čočku za tenkou považovat nelze. Spočtením ohniskové vzdálenosti podle zkorigovaného vztahu (6) vychází průměrná hodnota

$$f_{\mathrm{Bc}} = (16{,}56 \pm 0{,}07)\,\mathrm{cm}\,.$$

Přičemž chyba hodnoty δ se projeví jen jako odchylka $\pm 0{,}01$ cm.

Kulovou vadu čočky jsme měřil pro dvě vzdálenosti předmětu $a_1 = 30\,\mathrm{cm}$ a $a_2 = 54\,\mathrm{cm}$ (druhou vzdálenost jsme nastavil menší, než je uváděna v zadání, omylem, ale předpokládám, že to příliš nevadí, protože následující výsledky už k ničemu dalšímu nepoužívám). Získané průměrné hodnoty polohy stínítka pro dva směry čočky (x_{k} je kulovým rozhraním směrem k předmětu, x_{r} rovinným) a několik středních vzdáleností paprsků od osy jsou v tabulce 3.

h [mm]	$x_{\mathrm{k}1}$ [cm]	$x_{\mathrm{r}1}$ [cm]	$x_{\mathrm{k}2}$ [cm]	$x_{\mathrm{r}2}$ [cm]
paraxiální	74,03	73,37	83,60	83,87
15	73,70	73,27	83,47	83,80
25	73,10	72,77	83,27	83,43
35	72,17	72,00	83,00	82,83

Tabulka 3 – kulová vada čočky

Chybu jednotlivých poloh odhaduji na $\pm 0{,}1$ cm, takže chyba rozdílu $\Delta a'$ je $\pm 0{,}2$ cm. Regresí jsme určil koeficienty K ve vztahu (11). Vychází hodnoty

$$K_{\mathrm{k}1} = (15{,}2 \pm 0{,}1)\,\mathrm{m}^{-1}\,, \qquad K_{\mathrm{r}1} = (10{,}7 \pm 0{,}8)\,\mathrm{m}^{-1}\,,$$
$$K_{\mathrm{k}2} = \ (5{,}0 \pm 0{,}1)\,\mathrm{m}^{-1}\,, \qquad K_{\mathrm{r}2} = \ (8{,}0 \pm 0{,}7)\,\mathrm{m}^{-1}\,.$$

Konkrétní hodnoty $\Delta a'$ a proložené křivky pro všechny 4 polohy čočky jsou v grafu 1.

Goniometrem jsem měřil ještě vzdálenost hlavních rovin tlusté ploskovypouklé čočky. Podle [1] je tloušťka čočky $d_{\mathrm{t}} = 38\,\mathrm{mm}$. Změřené polohy uzlových bodů jsou v tabulce 4.

měření	1	2	3	4	5	prům.
x_1 [cm]	2,81	2,75	2,70	2,73	2,77	2,75
x_2 [cm]	1,41	1,39	1,42	1,41	1,41	1,41

Tabulka 4 – polohy uzlových bodů tlusté čočky

Rozdíl spolu se statistickým odhadem chyby je

$$\delta_{\mathrm{t}} = (1{,}34 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}\,.$$

Podle vztahu (7) mohu z těchto údajů určit index lomu skla čočky

$$n = 1{,}55 \pm 0{,}04\,.$$

Diskuze: Při určování ohniskové vzdálenosti čočky vychází Besselova metoda po započtení vzdálenosti hlavních rovin čočky přesnější než metoda dvojího zvětšení. Při měření Besselovou metodou je potřeba znát absolutní hodnotu vzdálenosti předmětu od stínítka, na které se zobrazuje obraz. Určení této vzdálenosti může být zatíženo systematickou chybou. U metody dvojího zvětšení je obdobně potřeba určit absolutní rozměr předmětu.

Metoda dvojího zvětšení je vhodná tehdy, když nemohu určit vzdálenost hlavních rovin zkoumané čočky. Přesnost je pak ovlivněna hlavně určením velikosti předmětu a obrazů. Pokud mohu určit rozměr čočky, je vhodnější Besselova metoda, protože při ní nepotřebuji měřit malé rozměry.

Jak je vidět z grafu 1, předpokládaná závislost kulové vady na vzdálenosti paprsků od osy vychází velmi dobře pro čočku otočenou kulovou plochou ke zdroji. Pro druhou polohu čočky je sice kvadratická úměrnost v rámci chyby měření také splněna, ale odchylky jsou podstatně větší. Důvodem může být nevhodně umístěná clona, která byla v tomto případě až za čočkou. Tento rozdíl v umístění clony může mít vliv na to, které paprsky jsou odcloněny a tím pádem i na význam vzdálenosti h.

Obecně má podle [2] platit, že kulová vada je tím menší, čím rovnoměrněji je rozložen lom paprsků mezi lámavé plochy čočky. V případě hodně vzdáleného předmětu je vhodné otočit k němu čočku kulovým rozhraním. Pokud je vzdálenost předmětu přibližně stejná jako vzdálenost obrazu, nemá otočení čočky žádný vliv a pokud je naopak předmět blíže než obraz, bude kulová vada nižší, když je k předmětu otočeno rovinné rozhraní.

V prvním měřeném případě byla vzdálenost předmětu $a_1 = 30\,\mathrm{cm}$ a vzdálenost obrazu přibližně $a'_1 = 48\,\mathrm{cm}$. Při druhém měření $a_2 = 54\,\mathrm{cm}$ a $a'_2 = 24\,\mathrm{cm}$. Jak je vidět v grafu, pro první měření (body indexované jedničkou) je skutečně otvorová vada menší při natočení čočky rovinným rozhraním k předmětu ($\Delta a'_{\mathrm{r}1}$) a pro druhé při natočení kulovým rozhraním ($\Delta a'_{\mathrm{k}2}$).

Při určování uzlových bodů tlusté čočky byl hlavní problém v tom, že dobrému zaostření dalekohledu goniometru překážela samotná hmota čočky. Proto je také rozptyl hodnot x_2 podstatně větší. Při druhé poloze čočky (odpovídající x_1) totiž zaostření možné bylo a také se s čočkou jednodušeji otáčelo. Výsledná chyba vzdálenosti uzlových bodů je pak určena ze statistických rozptylů x_1 a x_2. Pokud by měl goniometr vhodně větší rozměry, bude toto měření vhodné i pro poměrně přesné určení indexu lomu čočky.

ZÁVĚR: Metodou dvojího zvětšení jsem určil ohniskovou vzdálenost čočky na

$$f_{\mathrm{Z}} = (16{,}7 \pm 0{,}2)\,\mathrm{cm}\,.$$

Pomocí goniometru jsem změřil vzdálenost hlavních rovin této čočky s výsledkem

$$\delta = (0{,}39 \pm 0{,}4)\,\mathrm{cm}$$

a při započítání korekce na základě této hodnoty vychází ohnisková vzdálenost Besselovou metodou

$$f_{\mathrm{Bc}} = (16{,}56 \pm 0{,}07)\,\mathrm{cm}\,.$$

Hodnoty získané oběma metodami se v rámci přesnosti shodují.

Proměřil jsme kulovou vadu čočky. Výsledky jsou zobrazeny v grafu 1. A odpovídají předpokladu, že pro zmenšení kulové vady je třeba natočit ploskovypouklou čočku rovinným rozhraním k předmětu, pokud je blíže než obraz a naopak.

Goniometrem jsme určil vzdálenost hlavních rovin velmi tlusté čočky

$$\delta_{\mathrm{t}} = (1{,}34 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$$

a ze znalosti její skutečné tloušťky pak index lomu skla, ze kterého je vyrobena:

$$n = 1{,}55 \pm 0{,}04\,.$$

LITERATURA:

[1] I. Pelant, J. Fiala, J. Fänhrich, J. Pospíšil: Fyzikální praktikum III. – Optika, Karolinum, Praha 1993

[2] B. Klimeš, J. Kracík, A. Ženíšek: Základy fyziky II., Academia, Praha 1972