Martin Beránek, 2.F, X–11

Úloha 19 – Měření indexu lomu Jaminovým interferometrem

Pracovní úkol:

1. Změřte závislost indexu lomu vzduchu na tlaku.
2. Závislost zpracujte graficky, určete chybu měření a proveďte lineární regresi dané závislosti.

Teorie: Index lomu prostředí zmenšený o jedničku je úměrný času, o který trvá světlu urazit určitou dráhu déle, než ve vakuu. Toto prodloužení času je způsobeno interakcemi mezi světlem a částicemi prostředí. Pokud se nebude měnit typ částic, ani jejich relativní zastoupení, je počet interakcí (a tedy i přírůstek času a indexu lomu) úměrný hustotě částic. Pokud je možné zkoumané prostředí považovat za ideální plyn, bude za předpokladu konstantní teploty platit, že hustota je přímo úměrná tlaku tohoto plynu. Z předchozího tedy plyne, že index lomu ideálního plynu v závislosti na tlaku lze vyjádřit jako

$$N(p) = 1 + \alpha p\,, \tag{1}$$

kde α je konstanta charakteristická pro daný plyn.

Při měření Jaminovým interferometrem mohu určit absolutní hodnotu rozdílu indexu lomu vzduchu při dvou různých tlacích. Platí (viz [1])

$$N_2 - N_1 = \frac{k\lambda}{l}\,, \tag{2}$$

kde k je počet interferenčních proužků odpovídající danému rozdílu indexů lomu, λ vlnová délka použitého světla a l délka prostředí se vzorkem (kyvety).

Dosazením ze vztahu (1) do (2) je vidět, že počet proužků k, které přejdou přes nitkový kříž je úměrný tlaku vzduchu v kyvetě:

$$1 + \alpha p_2 - 1 + \alpha p_1 = \frac{k\lambda}{l}\,, \qquad p_2 - p_1 = k \cdot \frac{\lambda}{l\alpha}\,. \tag{3}$$

Měřením tedy mohu určit konstanty a a b ve vztahu

$$p = ak + b\,, \tag{4}$$

Dosazením do (3) pak získám vztah

$$\alpha = \frac{\lambda}{la}\,, \tag{5}$$

Měření: Při měření jsme za postupně zvyšovaného tlaku v kyvetě odečítal počet proužků v Jaminově interferometru a po každých deseti (dvaceti) proužcích jsem zaznamenal tlak vzduchu. K měření tlaku byly k dispozici dva manometry – rtuťový a elektronický. Z dělení stupnice na rtuťovém barometru mohu odhadnout přesnost na ± 5 Torr. Přesnost digitálního nebyla udána, ale vzhledem k tomu, že ukazuje hodnoty včetně jednotek Torru, předpokládám, že jeho přesnost je vyšší než u rtuťového. Při porovnání údajů obou barometrů je vidět, že hodnoty se v rámci chyby ± 5 Torr shodují, takže pro další zpracování budu používat pouze hodnoty digitálního manometru.

Délka kyvety interferometru je $l = 50\,\mathrm{cm}$. Přesnost tohoto údaje není explicitně udána, takže budu předpokládat $\pm 0{,}5\,\mathrm{cm}$. Pozorování jsme prováděl ve světle sodíkové výbojky. Střední vlnová délka sodíkového dubletu je $\lambda = 589{,}3\,\mathrm{nm}$ (viz např. [1], str. 169).

Získané hodnoty při odečítání tlaku po každých deset proužcích jsou v tabulce 1.

k	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
p [Torr] (měř. č. 1)	3	40	76	110	142	177	210	243	278	310	347	380	413
p [Torr] (měř. č. 2)	3	41	73	107	141	174	207	240	273	307	341	373	407

k	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220
p [Torr] (měř. č. 1)	447	480	512	546	580	612	646	679	712	745
p [Torr] (měř. č. 2)	440	473	507	540	573	606	639	673	707	740

Tabulka 1 – tlak odpovídající určitému počtu proužků

Proložením regresní přímkou pak získám koeficienty ve vztahu (4). Pro tyto dvě měření vychází (viz grafy 1 a 2) hodnoty

$$a_1 = (3{,}360 \pm 0{,}006)\,\mathrm{Torr}\,, \quad b_1 = (8{,}1 \pm 0{,}7)\,\mathrm{Torr}\,,$$
$$a_2 = (3{,}334 \pm 0{,}003)\,\mathrm{Torr}\,, \quad b_2 = (6{,}6 \pm 0{,}4)\,\mathrm{Torr}\,.$$

k	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220
p [Torr] (měř. č. 3)	3	70	137	204	270	336	403	471	537	603	669	736
p [Torr] (měř. č. 4)	2	67	136	203	269	336	403	470	537	603	669	737

Tabulka 2 – tlak odpovídající určitému počtu proužků

Při dalších dvou měřeních jsem odečítal hodnoty tlaku vždy po dvaceti interferenčních proužcích. Naměřené údaje jsou uvedeny v tabulce 2. Opět jsme je proložil regresní přímkou (viz grafy 3 a 4) a získané koeficienty jsou

$$a_3 = (3{,}331 \pm 0{,}002)\,\mathrm{Torr}\,, \quad b_3 = (3{,}6 \pm 0{,}3)\,\mathrm{Torr}\,,$$
$$a_4 = (3{,}341 \pm 0{,}003)\,\mathrm{Torr}\,, \quad b_4 = (1{,}8 \pm 0{,}4)\,\mathrm{Torr}\,.$$

Vzhledem k tomu, že jsme tlak odečítal vždy po stejném počtu prošlých proužků, měly by být rozdíl každých dvou sousedních (tj. po sobě naměřených) tlaků stejný. Alternativní metodou zpracování získaných dat je tedy to, že spočítám pro každé měření diference tlaku a ty vyhodnotím jako statistický soubor dat. Podělením počtem proužků na jeden krok pak získám hodnotu odpovídajícího koeficientu a (koeficient b k dalšímu zpracování nepotřebuji). Touto metodou jsme získal následující hodnoty pro každé ze čtyř provedených měření:

$$a'_1 = (3{,}36 \pm 0{,}13)\,\mathrm{Torr}\,, \quad a'_2 = (3{,}35 \pm 0{,}12)\,\mathrm{Torr}\,,$$
$$a'_3 = (3{,}33 \pm 0{,}03)\,\mathrm{Torr}\,, \quad a'_4 = (3{,}34 \pm 0{,}05)\,\mathrm{Torr}\,.$$

Pro obě metody vychází vážený průměr výsledků čtyř provedených měření stejně – konkrétně $\overline{a} = (3{,}34 \pm 0{,}01)$ Torr. Chybu výsledku odhaduji z rozptylu jednotlivých dílčích výsledků.

Po dosazení všech údajů do vztahu (5) vychází

$$\alpha = (353 \pm 5) \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Torr}^{-1} = (2{,}65 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Pa}^{-1}\,.$$

Měření bylo prováděno za okolní teploty $t = 23{,}5\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Diskuze: Pro ověření získaného výsledku jsem použil literaturu [2]. Na straně 126 je uveden vztah pro závislost indexu lomu vzduchu na teplotě a tlaku. Po dosazení teploty, za které probíhalo měření a pro použitou vlnovou délku vychází koeficient před tlakem $\alpha_{\mathrm{tab}} = 2{,}657 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Pa}^{-1}$.

Je vidět, že tabulkový údaj je v dobré shodě s výsledky měření. Chyba měření je v tuto chvíli způsobena hlavně nepřesností údaje o délce kyvety. Odhadnutá nepřesnost směrnic a je o řád nižší. Ovšem při upřesnění údaje o délce kyvety by se projevila chyba, kterou jsme dosud zanedbával. Při měření se mohlo stát (a pravděpodobně stalo), že v některých případech neprošlo přes zaměřovací kříž dalekohledu přesně deset (dvacet) proužků, ale třeba o jeden méně či více. Tato chyba pak může způsobit posunutí všech dalších měřených hodnot a proto se také neprojeví v odhadnuté chybě směrnice regresní přímky. Tím je možné vysvětlit, že hodnoty a_1 až a_4 se neshodují ani v rámci uváděné chyby. Tato chyba je samozřejmě způsobena jen nepozorností experimentátora, takže by se dala vyloučit spolehlivějším (např. elektronickým) zaznamenáváním interferenčních proužků. Ovšem jak je vidět z alternativního zpracování výsledků pomocí diferencí sousedních hodnot, neprojevila se tato chyba při měření nijak podstatně. Při druhé metodě zpracování je chybou ovlivněna pouze jedna hodnota a ne už ty po ní následující, takže pokud se výsledky podstatně neliší, je z toho možné vyvozovat, že chyby v počítání proužků zde nehrají příliš velkou roli.

Druhým možným zdrojem chyby je fakt, že při zvyšování tlaku v kyvetě nebylo možné dosáhnou nastavení požadovaného k (počtu proužků) s přesností lepší než přibližně $\pm 0{,}25$ proužku. Ovšem tato chyba má náhodný charakter a je redukována větším počtem měření a následným statistickým zpracováním údajů.

ZÁVĚR: Ověřil jsme linearitu závislosti indexu vzduchu na tlaku pro tlaky menší než normální atmosferický. Index lomu při teplotě $t = 23{,}5\,^{\circ}\mathrm{C}$ jsme určil jako

$$N(p\,[\mathrm{Pa}]) = 1 + (2{,}65 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-9} \cdot p\,.$$

Tento vztah se shoduje s údaji uváděnými ve [2], str. 126.

LITERATURA:

[1] I. Pelant, J. Fiala, J. Fänhrich, J. Pospíšil: Fyzikální praktikum III. – Optika, Karolinum, Praha 1993
[2] Brož, Voskovec, Valouch: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha 1980