Martin Beránek, 2.F, X–11

Úloha 12 – Studium rotační disperze křemene a Kerrova jevu v kapalině

Pracovní úkol:

1. Proměřte rotační disperzi křemene.
2. Proměřte Kerrův elektrooptický jev nitrobenzenu při vlnové délce sodíkového dubletu.

Teorie: Dopadá-li na krystal křemene ve směru šroubové osy lineárně polarizované světlo, rozdělí se na dvě protiběžně orientované kruhově polarizované složky. Každá složka se šíří jinou rychlostí, takže poté, co vystoupí z krystalu se složí opět v lineárně polarizované světlo, ovšem s rovinou stočenou o úhel α. Míra tohoto stočení je přímo úměrná vzdálenosti, kterou světlo prošlo krystalem. Dále úhel α závisí na vlastnostech krystalu a vlnové délce světla. Zavedením měrné stáčivosti odstraníme závislost na rozměrech krystalu. Měrná stáčivost je definována jako úhel, o který se pootočí rovina polarizace při jednotkové dráze opticky aktivním prostředím (krystalem).

Teoretický vztah pro měrnou stáčivost křemene ϱ udává [1] jako

$$\varrho(\lambda) = \frac{\pi(N_\mathrm{l}(\lambda) - N_\mathrm{p}(\lambda))}{\lambda}\,, \tag{1}$$

kde N_l a N_p jsou indexy lomu pro levotočivé a pravotočivé světlo. Z tohoto vztahu vychází měrná stáčivost v radiánech na jednotku vlnové délky.

Po dosazení Cauchyova vztahu pro indexy lomu ([3], str. 363) můžeme vztah (1) upravit na

$$\varrho(\lambda) = \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^3} + \frac{C_3}{\lambda^5} + \dots\,, \tag{2}$$

kde C_i jsou bezrozměrné konstanty charakterizující křemen.

Kvalitativně odlišný vztah jsme našel v publikaci [2], str. 266. Pro závislost měrné stáčivosti na vlnové délce platí

$$\varrho(\lambda) = \frac{k_1}{\lambda^2 - \lambda_1^2} + \frac{k_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} + \frac{k_3}{\lambda^2 - \lambda_3^2} + \frac{k_4}{\lambda^2}\,, \tag{3}$$

kde λ_i jsou vlnové délky, pro něž nastává největší absorpce (rezonance) a k_i experimentálně určené konstanty. V této publikaci jsou udány i konkrétní hodnoty pro křemen a po dosazení do (3) vychází měrná otáčivost v úhlových stupních na milimetr délky

$$\varrho(\lambda\,[\mu\mathrm{m}]) = \frac{13{,}42}{\lambda^2 - 78{,}22} + \frac{11{,}6064}{\lambda^2 - 0{,}010627} - \frac{4{,}3865}{\lambda^2}\,. \tag{4}$$

Přestože jsou vztahy (2) a (4) kvalitativně odlišné, mohou dávat v určité oblasti spektra velmi blízké výsledky. Mě při měření zajímají vlnové délky přibližně mezi 400 a 600 nm. V této oblasti nemá (4) žádné singulární body, takže se bude charakterem blížit kvadratické hyperbole. Charakter hyperboly (i když v jiných mocninách) bude mít i (2). U tohoto vztahu navíc předpokládám, že velikost členů součtu bude klesat s rostoucí mocninou jmenovatele.

Druhým zkoumaným jevem je **Kerrův elektrooptický jev**. Látka umístěná do elektrického pole začne podle něj vykazovat dvojlomné vlastnosti. Rozdíl indexů lomu pro řádný a mimořádný paprsek je pak úměrný druhé mocnině intenzity pole. Podle [1]

$$N_\mathrm{m} - N_\mathrm{ř} = K\lambda E^2\,, \tag{5}$$

kde K je Kerrova konstanta charakterizující danou látku a λ vlnová délka světla.

Při Sénarmontově kompenzačním uspořádáním se z lineárně polarizovaného světla vytvoří čtvrtvlnovou destičkou kruhově polarizované. To prochází kondenzátorem kolmo na směr elektrického pole.

Kvůli dvojlomným vlastnostem vyjde obecně elipticky polarizované. Druhou čtvrtvlnovou destičkou se z něj vytvoří opět lineárně polarizované, ovšem oproti původnímu se stočenou rovinou polarizace. Pro úhel stočení platí α (opět podle [1])

$$\alpha = \frac{\pi d}{\lambda} \left(N_{\mathrm{m}} - N_{\check{\mathrm{r}}} \right), \tag{6}$$

kde d je délka kondenzátoru, kterým světlo prošlo.

Při obou měřeních je potřeba zjistit úhel stočení polarizační roviny. K tomu slouží polarimetry. V této úloze se používá polostínová metoda, kde vstupní polarizátor vytvoří v každé polovině zorného pole světlo s mírně natočenou rovinou polarizace (přibližně o několik stupňů). Analyzátorem pak hledám natočení, při kterém se budou obě poloviny jevit stejně tmavé. Pro získání absolutní hodnoty stočení je potřeba určit natočení analyzátoru bez opticky aktivní látky a rozdíl vůči natočení při vložené opticky aktivní látce je hledaný úhel stočení.

Vzhledem k tomu, že stáčení polarizační roviny je závislé na vlnové délce, je potřeba provádět tato měření pouze pro monochromatické světlo (prakticky pro světlo s malým rozsahem vlnových délek).

MĚŘENÍ: Rotační disperzi křemene jsem měřil polarimetrem polostínovou metodou. Přesnost odečtení úhlu polarizátoru je dostatečně vysoká ($\pm 0{,}005°$), ale negativně se projeví fakt, že je potřeba subjektivně srovnat jas dvou částí zorného pole, navíc v některých případech při velmi malém celkovém jasu. Chybu měření budu určovat jako statistický odhad rozptylu z naměřených hodnot, ovšem nemohu vyloučit, že celé měření je zatíženo nějakou další chybou, kdy bych všechny hodnoty určil posunuté stejným způsobem (a při statistickém zpracování se tato chyba tedy neprojeví). Navíc deset naměřených hodnot je na hranici použitelnosti statistického zpracování.

Měřil jsme dva vzorky s různou délkou aktivního prostředí. Vzhledem k tomu, že přímá úměrnost úhlu stočení a délky je velmi dobře zdůvodnitelná, budu pro další zpracování ihned přepočítávat úhly stočení na jeden milimetr délky. K měření jsem použil světlo pěti různých vlnových délek ze spektra rtuťové výbojky.

Nejprve jsem určil polohu analyzátoru, ve které jsou obě pole stejně tmavá bez vložení aktivní látky. Z pěti měření vychází hodnota $\alpha_0 = -(0{,}67 \pm 0{,}02)°$. Záporné znaménko znamená, že analyzátor byl natočen na opačnou stranu, než při následujících měřeních.

Naměřené hodnoty pro oba vzorky a jednotlivé vlnové délky jsou uvedeny v tabulce 1. Úhel α' je úhel natočení analyzátoru. Polarizační rovina je tedy stočena o úhel $\alpha = \alpha' - \alpha_0$.

d [mm]	**0,405**					**1,595**				
λ [nm]	578	546	491	436	405	578	546	491	436	405
α' [°]	8,50	9,52	11,41	15,66	18,67	35,28	39,74	49,55	65,57	71,75
	8,45	9,38	11,43	15,68	17,86	35,23	39,70	49,49	64,88	71,86
	8,41	9,53	12,17	15,67	17,96	35,28	39,51	46,89	65,04	71,89
	8,34	9,44	12,28	15,88	17,60	35,22	39,73	48,00	64,84	70,93
	8,39	9,36	11,47	15,52	18,29	35,31	39,79	49,00	64,41	71,16

Tabulka 1 – stáčení polarizační roviny v krystalu křemene

Po přepočtení na stejnou délku d tedy získám deset hodnot pro každou vlnovou délku světla. Hodnoty pro jednotlivé vzorky se navzájem liší, ale rozdíly jsou menší než rozptyl naměřených hodnot, takže je zahrnu jen do statistického zpracování. (Tyto rozdíly jsou pravděpodobně způsobeny nepřesnostmi v udání tloušťky vzorků d.) Průměrné hodnoty měrné stáčivosti (ve stupních na jeden milimetr) a odpovídající statistický odhad rozptylu jsou uvedeny v tabulce 2.

λ [nm]	578	546	491	436	405
ϱ [°/mm]	22,5	25,1	30,8	40,8	45,8
$\tilde{\sigma}^\star$ [°/mm]	0,1	0,2	0,9	0,5	0,9

Tabulka 2 – měrná stáčivost křemene

Tyto hodnoty jsme se pokusil proložit grafem podle vztahu (2). Při použití samotného prvního členu nevystihuje křivka dostatečně dobře naměřená data a vzhledem k nízkému počtu naměřených

bodů způsobí použití tří a více členů příliš velkou neurčitost jednotlivých koeficientů. Zbývá tedy fitovat křivku podle předpisu

$$\varrho(\lambda) = \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^3}\,. \tag{2'}$$

Pro měrnou stáčivost ve stupních vychází

$$C_1 = (7{,}1 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-3} \qquad \text{a} \qquad C_2 = (1{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-15}\,,$$

V grafu 1 jsou vyneseny naměřené hodnoty a tato proložená křivka. Navíc je čárkovaně vyznačena teoretická závislost podle vztahu (4).

Kerrův jev jsem měřil opět polostínovou metodou. Ze vztahů (5) a (6) vyplývá, že úhel stočení polarizační roviny by měl být přímo úměrný druhé mocnině napětí na kondenzátoru. Protože nemám jak určit vzájemnou polohu polarizátoru a analyzátoru, nebudu ověřovat, že jde o přímou úměrnost a soustředím se pouze na určení směrnice této závislosti.

Určoval jsme polohu analyzátoru pro sedm různých napětí na kondenzátoru a pro obě polarity. Získané hodnoty jsou v tabulce 3.

U [kV]	**1,0**		**0,9**		**0,8**		**0,7**		**0,6**		**0,4**		**0,0**
polarita	(+)	(−)	(+)	(−)	(+)	(−)	(+)	(−)	(+)	(−)	(+)	(−)	
α' [°]	78,78	79,29	76,87	78,58	76,28	77,54	75,57	75,59	74,62	74,41	71,82	72,52	71,82
	78,43	80,19	77,41	78,75	75,91	75,78	75,71	76,00	73,58	73,45	72,77	72,50	72,08
	79,17	79,72	77,40	78,09	75,63	76,62	75,14	75,75	73,46	73,95	72,53	72,99	72,10
	78,96	79,84											71,89
													72,26

Tabulka 3 – Kerrův jev v nitrobenzenu

Je vidět, že hodnoty úhlu se pro obě polarity mírně liší, ale vzhledem k tomu, že to nelze zahrnout do nějaké jednoduché korekce, budu počítat všechny úhly pro dané napětí společně. Průměr a odhad rozptylu úhlů pro jednotlivá napětí je uveden v tabulce 4.

$(U\,[\mathrm{kV}])^2$	0	0,16	0,36	0,49	0,64	0,81	1,00
α' [°]	72,0	72,5	73,9	75,6	76,3	77,9	79,3
$\tilde{\sigma}^\star$ [°]	0,2	0,4	0,5	0,3	0,7	0,7	0,6

Tabulka 4 – závislost úhlu stočení na napětí

Tyto hodnoty jsou vyneseny v grafu 2 a proloženy přímkou se směrnicí

$$a = (7{,}3 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-6}\ {}^\circ/\mathrm{V}^2 = (1{,}27 \pm 0{,}07) \cdot 10^{-7}\,\mathrm{rad/V}^2\,.$$

Podle vztahů (5) a (6) platí

$$\alpha = \frac{\pi d K}{t^2}\,U^2 \qquad \text{a tedy} \qquad a = \frac{\pi d K}{t^2}\,, \quad K = \frac{a t^2}{\pi d} \tag{7}$$

kde t je vzdálenost desek kondenzátoru, d šířka kondenzátoru a K Kerrova konstanta. Podle informací k úloze je $d = 20\,\mathrm{mm}$ a $t = 1{,}0\,\mathrm{mm}$. Z toho vychází hodnota Kerrovy konstanty

$$K = (2{,}0 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m/V}^2\,.$$

Diskuze: Z grafu 1 je vidět, že vztah (2′) vystihuje naměřené hodnoty poměrně dobře. Rozdíl mezi těmito hodnotami a křivkou podle [2] může být způsoben kombinací více vlivů. Předně je tu možná nepřesnost údajů o tloušťce vzorků, dále může být v naměřených datech subjektivní chyba, která se buďto vždy projevuje stejným směrem, nebo se nepromítla do statistických odhadů kvůli malému počtu měření. Vliv může také určitá nepřesnost vlnové délky. Obecně je vidět, že mimo hodnoty pro 405 nm je odchylka od křivky podle literatury minimální a dá se vysvětlit výše uvedenými vlivy. Poslední hodnotu bych z tohoto hlediska mohl považovat za náhodnou chybu způsobenou malým množstvím dat.

Při vhodné volbě konstant C_1 a C_2 v rámci chyby spočítané při regresi je možné dosáhnou velmi dobré shody obou křivek.

Při měření Kerrova jevu u nitrobenzenu se opět projevují stejné problémy při určování roviny polarizace. Navíc je zde systematická chyba způsobená polarizací elektrod kondenzátoru. Dále při výpočtu směrnice závislosti zanedbávám chybu napětí kondenzátoru. Tu sice neumím přesně určit, ale už podle stupnice použitého voltmetru je jasné, že může být srovnatelná s chybou určení úhlu. Navíc jde o náhodnou chybu, což mírně zkresluje hodnoty získané regresí. Výslednou chybu Kerrovy konstantu jsme v předchozím textu určil jako maximální chybu ze odhadu rozptylu regrese a z odchylek rozměrů kondenzátoru (počítám polovinu poslední platné cifry). Oba tyto vlivy jsou přibližně stejné, takže přesnost měření by bylo možné zlepšit upřesněním rozměrů.

Pokud budu navíc uvažovat chybu čtverce napětí 5% a připočtu ji opět podle principu maximální chyby, získám $K = (2{,}0 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m/V^2}$, což už odpovídá hodnotě uvedené v [2], str. 167 (Kerrova konstanta nitrobenzenu $K = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m/V^2}$). Nižší naměřená hodnota může být také způsobena systematickou chybou metody. Pro pole uvnitř kondenzátoru neplatí přesně, že existuje pouze po délce d a má všude intenzitu U/t. Na krajích kondenzátoru jsou siločáry zakřivené a pole má menší intenzitu. Protože jev závisí na druhé mocnině intenzity, bude mít zeslabení pole větší vliv než jeho rozšíření přes okraje desek a hodnota Kerrovy konstanty určená bez korekce tohoto jevu tedy bude menší než skutečná. Vzhledem k poměru šířky a délky kondenzátoru 1/20 odhaduji, že tento vliv může být maximálně několik procent.

ZÁVĚR: Z naměřených údajů pro pět různých vlnových délek jsme určil rotační disperzi křemene ve stupních jako

$$\varrho(\lambda) = \frac{(7{,}1 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-3}}{\lambda} + \frac{(1{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-15}}{\lambda^3}\,.$$

Tato závislost v měřeném oboru vlnových délek dobře odpovídá závislosti podle literatury [2].

Proměřením Kerrova elektrooptického jevu v nitrobenzenu jsem určil hodnotu Kerrovy konstanty

$$K = (2{,}0 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m/V^2}\,.$$

Tato hodnota je zatížena systematickou chybou metody a ve skutečnosti může být mírně vyšší (maximálně o několik procent). Změřená hodnota v rámci chyby odpovídá údaji z literatury [2].

LITERATURA:

[1] I. Pelant, J. Fiala, J. Fänhrich, J. Pospíšil: Fyzikální praktikum III. – Optika, Karolinum, Praha 1993
[2] Miroslava Vrbová a kolektiv: Lasery a moderní optika, Prometheus, Praha 1994
[3] B. Klimeš, J. Kracík, A. Ženíšek: Základy fyziky II., Academia, Praha 1972