Martin Beránek, 2.F, X–11

Úloha 2 – Měření odporů

Pracovní úkol:

1. Změřte metodou přímou závislost odporu vlákna žárovky na proudu, který jím protéká. K měření použijte stejnosměrné napětí v rozsahu do 24 V.
2. Změřte substituční metodou vnitřní odpor měřicích přístrojů použitých v úkolu 1. Výsledek použijte ke korekci naměřených hodnot odporů v úkolu 1.
3. Metodou substituční změřte závislost odporu vlákna žárovky na proudu v rozsahu 2 až 25 mA. Porovnejte přesnost výsledků s přesností dosaženou v úkolu 1.
4. Stanovte odpor vlákna žárovky při pokojové teplotě. K extrapolaci odporu vlákna na pokojovou teplotu použijte graf závislosti odporu vlákna na příkonu žárovky.

Teorie: Při měření odporu pomocí voltmetru a ampérmetru je možné tyto přístroje zapojit dvěma způsoby. Pokud je voltmetr připojen přímo k měřenému odporu a ampérmetr až před ním, zjistím přímým odečtením správnou hodnotu napětí. Hodnotu proudu udávanou ampérmetrem ovšem musím snížit o proud tekoucí voltmetrem. Pokud je vnitřní odpor voltmetru R_V, platí pro proud zkoumaným odporem

$$I_\mathrm{r} = I - \frac{U}{R_\mathrm{V}}\,, \tag{1}$$

kde I a U jsou hodnoty udávané přístroji.

Druhou možností je zapojit přímo ke vzorku ampérmetr a voltmetr až přes vzorek a ampérmetr. V tomto případě je odečtená hodnota proudu skutečnou hodnotou, která teče vzorkem, ale naopak napětí je nižší než udává voltmetr. Musím jej snížit o napětí na ampérmetru, tedy pokud je jeho vnitřní odpor R_A, bude pro skutečnou hodnotu napětí platit

$$U_\mathrm{r} = U - IR_\mathrm{A}\,. \tag{2}$$

Alternativně se dá neznámý odpor měřit substituční metodou, tedy porovnáním s jiným, kalibrovaným, odporem. K tomuto účelu používám odporovou dekádu, která má velmi dobrou přesnost. Ampérmetrem měřím proud obvodem, ve kterém je zapojen zkoumaný odpor. Pak místo neznámého odporu zapojím dekádu a nastavím takovou hodnotu, aby obvodem tekl stejný proud jako v případě, kdy byl zapojen neznámý odpor. Hodnota odporu na dekádě je odporem neznámého vzorku. Tato metoda má výhodu v tom, že od ampérmetru potřebuji pouze dobrou rozlišovací schopnost a jeho systematické chyby výsledek nijak neovlivňují.

V této úloze jsme měřil závislost odporu vlákna žárovky na jejím příkonu. Odpor vlákna žárovky závisí přímo na teplotě. Podle [2] platí pro kovy vztah

$$R = R_0 \exp\left[K\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]\,, \tag{3}$$

kde R_0 je odpor vlákna při teplotě T_0 a R odpor při teplotě T. K je látková konstanta a pro kovy je záporná (tedy odpor kovů s rostoucí teplotou roste).

Vlákno žárovky se dá aproximovat jako dokonale černé těleso o teplotě T umístěné ve volné prostoru vyplněném zářením o teplotě T_0, u kterého probíhá veškerá tepelná výměna pouze zářením. Teplota T_0 ovšem nemusí odpovídat teplotě okolního prostředí. Lépe by ji vystihovala teplota baňky žárovky, která ovšem mění v závislosti na teplotě vlákna. Kvůli velmi složitému popisu dějů souvisejících s vedením tepla žárovkou a prouděním vzduchu kolem baňky budu nadále předpokládat, že tepelný výkon vycházející ze žárovky je

$$P = \sigma S\left(T^4 - T_0^4\right)\,. \tag{4}$$

T je teplota vlákna, T_0 blíže nespecifikovaná konstanta s rozměrem teploty, σ Stefan-Boltzmannova konstanta a S konstanta vyjadřující účinný povrch vlákna. Tímto zjednodušením se dopouštím určitých systematických chyb, ale předpokládám, že se vzhledem k chybám měření výrazněji neprojeví. Pokud je

malá tepelná vodivost plynu uvnitř baňky a malá pohltivost skla, bude se teplota baňky jen málo lišit od teploty okolí a přenos tepla jiným způsobem než zářením bude zanedbatelný.

Závislost odporu vlákna na příkonu pak mohu sloučením vztahů (3) a (4) zapsat jako

$$R = R_0 \exp\left[K\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}+T_0^4}}-\frac{1}{T_0}\right)\right]. \tag{5}$$

Za výše zmíněného předpokladu, že T_0 odpovídá přibližně pokojové teplotě, bude R_0 odpor vlákna při pokojové teplotě. Tato hodnota vyjde tehdy, když dosadím nulový příkon P.

Vztah (5) je možné upravit na jednodušší, který bude obsahovat pouze tři nezávislé koeficienty a, b a c.

$$R = a \exp\left(\frac{b}{\sqrt[4]{P+c}}\right). \tag{6}$$

Dvojice hodnot R a P získám měřením a pomocí programu pro nelineární regresi mohu zjistit koeficienty. Odpor při pokojové teplotě získám tehdy, když dosadím nulový příkon, tedy

$$R_0 = a \exp\left(\frac{b}{\sqrt[4]{P}}\right). \tag{7}$$

Programy, které mám k dispozici umí při regresi počítat pouze s odchylkou jedné z hodnot, ale v tomto případě jsou chyby obou srovnatelné. Chybu P tedy převedu na chybu R. Pokud je ΔP odchylka příkonu P, přičtu k odchylce odporu hodnotu

$$\Delta R_\mathrm{P} = \frac{\partial R(P)}{\partial P}\,\Delta P = -\frac{b\,R(P)}{4(P+c)^{5/4}}\,\Delta P\,. \tag{8}$$

Předpokládám, že tato oprava výsledné koeficienty příliš nezmění, takže nejprve určím hodnoty a, b a c pro neupravenou odchylku ΔR a z nich spočítám derivaci ve vztahu (8).

Chybu odporu ze vztahu (7) spočítám ze statistických chyb jednotlivých koeficientů jako

$$(\Delta R_0)^2 = \left(\frac{\partial R_0}{\partial a}\,\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial R_0}{\partial b}\,\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial R_0}{\partial c}\,\Delta c\right)^2,$$

$$\Delta R_0 = R_0\sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\sqrt[4]{c}}\right)^2 + \left(\frac{b\,\Delta c}{4c^{5/4}}\right)^2}. \tag{9}$$

Měření: Vnitřní odpor přístrojů jsem měřil substituční metodou. Chyba zjištěných hodnot je velmi nízká (většinou méně než procento). Vzhledu k tomu, že vnitřní odpor vystupuje pouze jako oprava naměřené hodnoty, mohu tyto chyby dále zanedbat. Zjištěné hodnoty pro voltmetr (v závorce je uveden příslušný rozsah)

$$R_\mathrm{V} = 2{,}99\,\mathrm{k\Omega}\,(2{,}4\,\mathrm{V}), \qquad R_\mathrm{V} = 12{,}60\,\mathrm{k\Omega}\,(12\,\mathrm{V}), \qquad R_\mathrm{V} = 24{,}58\,\mathrm{k\Omega}\,(24\,\mathrm{V}).$$

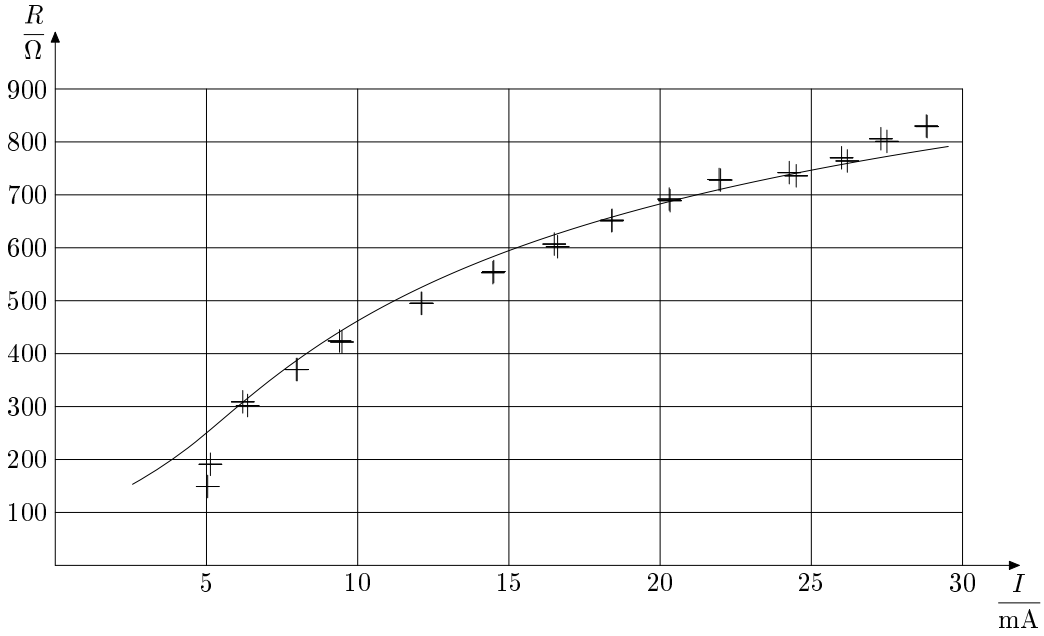
Pro ampérmetr jsem zjistil následující hodnoty

$$R_\mathrm{A} = 68{,}8\,\Omega\,(6\,\mathrm{mA}), \qquad R_\mathrm{A} = 17{,}1\,\Omega\,(24\,\mathrm{mA}), \qquad R_\mathrm{A} = 3{,}0\,\Omega\,(120\,\mathrm{mA}).$$

Dále jsem měřil proud žárovkou při postupně zvyšovaném napětí. Hodnoty získané při zapojení voltmetru přímo k žárovce jsou v tabulce 1. Ve sloupci I_r je uveden skutečný proud žárovkou spočítaný podle vztahu (1). Odpor žárovky je určen jako podíl napětí a proudu. Jeho chyba je součet chyby voltmetru a ampérmetru (oba přístroje mají udávanou chybu 0,5% rozsahu).

V tabulce 2 jsou hodnoty změřené při zapojení voltmetru paralelně k žárovce a ampérmetru. Ve sloupci U_r je hodnota napětí přímo na žárovce určená podle vnitřního odporu ampérmetru R_A.

Naměřené hodnoty získané pomocí obou těchto metod jsou společně vyneseny v grafu 1. Proložená křivka je vykreslena parametricky podle fitované závislosti odporu vlákna na příkonu (viz dále) – tedy jako $(\sqrt{P/R(P)}, R(P))$ s parametrem P.



Graf 1 – odpor vlákna v závislosti na protékajícím proudu

U [V]	I [mA]	R_V [kΩ]	I_r [mA]	R [Ω]
0,98	5,46	2,99	5,13	191 ± 3
1,92	7,0	2,99	6,36	302 ± 8
2,95	8,2	12,6	7,97	370 ± 10
4,0	9,8	12,6	9,48	420 ± 10
6,0	12,6	12,6	12,12	500 ± 10
8,0	15,1	12,6	14,47	553 ± 9
10,0	17,4	12,6	16,61	602 ± 8
12,0	18,9	24,58	18,41	650 ± 10
14,0	20,9	24,58	20,33	690 ± 10
16,0	22,6	24,58	21,95	729 ± 9
18,0	25,0	24,58	24,27	740 ± 20
20,0	27,0	24,58	26,19	760 ± 20
22,0	28,2	24,58	27,30	810 ± 20
23,9	29,8	24,58	28,83	830 ± 20

Tabulka 1

U [V]	I [mA]	R_A [Ω]	U_r [V]	R [Ω]
1,10	5,04	68,8	0,75	149 ± 3
2,02	6,2	17,1	1,91	309 ± 8
3,1	8,0	17,1	2,96	370 ± 10
4,2	9,4	17,1	3,99	420 ± 10
6,2	12,1	17,1	5,99	500 ± 10
8,3	14,5	17,1	8,05	555 ± 9
10,3	16,5	17,1	10,02	607 ± 8
12,3	18,4	17,1	11,99	650 ± 10
14,4	20,3	17,1	14,05	690 ± 10
16,4	22,0	17,1	16,02	728 ± 9
18,1	24,5	3,0	18,03	740 ± 20
20,1	26,0	3,0	20,02	770 ± 20
22,1	27,5	3,0	22,02	800 ± 20
24,0	28,8	3,0	23,91	830 ± 20

Tabulka 2

I [mA]	2,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	16,0	18,0	20,0	22,0	24,0
R [Ω]	137,8	228	310	378	436	496	547	596	640	687	722	760
ΔR [Ω]	0,6	1	1	1	1	2	3	3	3	3	3	3

Tabulka 3

Dále jsme měřil odpor vlákna substituční metodou při různých proudech. Jako referenční odpor jsem používal dekádu s přesností ±0,1%. Výsledná chyba je tato odchylka plus odchylka daná malou rozlišovací schopností ampérmetru. Tj. pro blízké hodnoty odporů se výchylka ampérmetru už pozorovatelně nezměnila. Hodnoty proudu a odpovídajících odporů jsou v tabulce 3.

Je vidět, že hodnota odporu je v tomto případě určena řádově přesněji než u předchozí metody.

Pro interpolaci odporu jsem použil hodnoty ze substitučního měření (kvůli jejich větší přesnosti). Hodnotu příkonu spočítám jako I^2R. Interpolací programem Gnuplot jsem získal koeficienty ze vztahu (6).

$$a = (1400 \pm 60)\,\Omega\,, \qquad \mathrm{b} = -(0{,}53 \pm 0{,}02)\,\mathrm{W}^{1/4}\,, \qquad \mathrm{c} = (0{,}0022 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{W}\,.$$

Tyto hodnoty jsem použil k výpočtu celkové chyby jednotlivých hodnot odporu podle vztahu (8). Získané výsledky jsou na posledním řádku tabulky 4.

P [mW]	0,55	3,65	11,2	24,2	44	71	107	153	207	275	349	438
ΔP [mW]	0,02	0,07	0,2	0,8	1	2	2	3	4	4	5	6
R [Ω]	137,8	228	310	378	436	496	547	596	640	687	722	760
ΔR [Ω]	0,6	1	1	1	1	2	3	3	3	3	3	3
$\Delta R'$ [Ω]	1	3	3	5	5	6	5	5	5	5	5	4

Tabulka 4

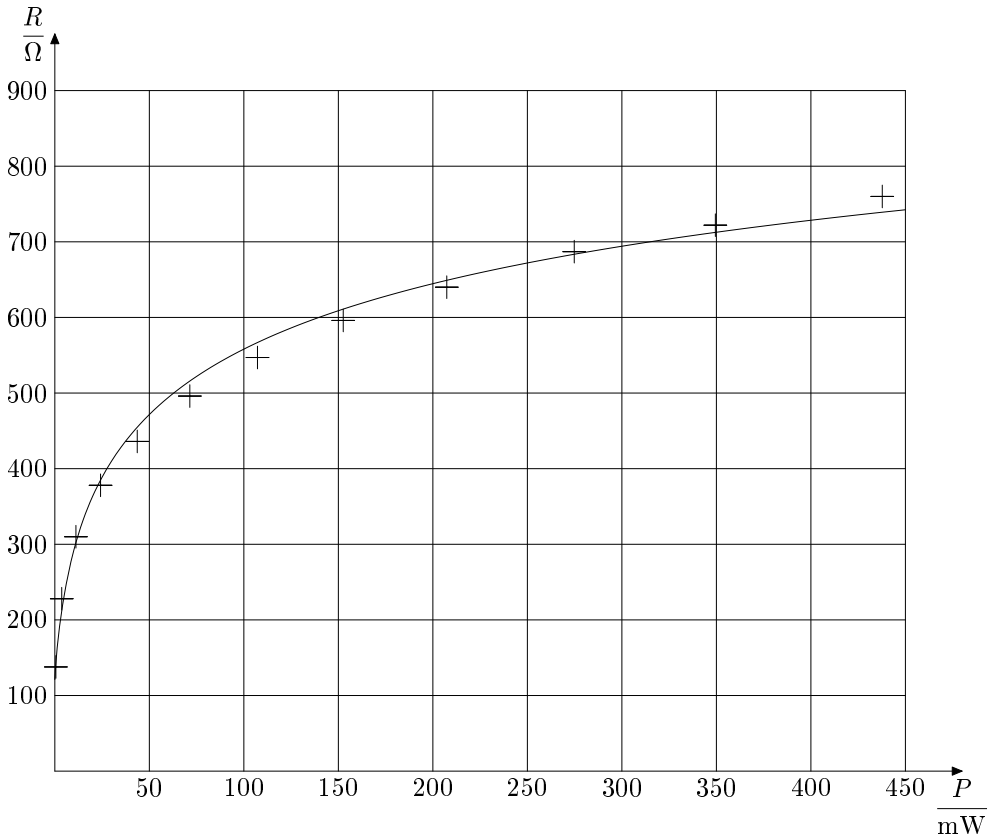
Po provedení druhé regrese se zřetelem k chybě jednotlivých hodnot vyjdou téměř stejné hodnoty, které už nebudu dále upravovat

$$a = (1400 \pm 50)\,\Omega\,, \qquad \mathrm{b} = -(0{,}52 \pm 0{,}02)\,\mathrm{W}^{1/4}\,, \qquad \mathrm{c} = (0{,}0020 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{W}\,.$$

Naměřené hodnoty jsou spolu s touto křivkou znázorněny v grafu 2.

Po dosazení do vztahu (7) a spočítání chyby podle (9) získám předpokládanou hodnotu odporu vlákna při pokojové teplotě

$$R_0 = (120 \pm 20)\,\Omega\,.$$



Graf 2 – závislost odporu vlákna na příkonu

Diskuze: Hodnoty odporu vlákna změřené pomocí voltmetru a ampérmetru se po započítání korekce navzájem velmi dobře shodují. Pokud znám (mohu změřit) vnitřní odpor přístrojů, je z hlediska přesnosti měření nepodstatné, kterou ze dvou metod (umístění měřících přístrojů) použiji. Pouze je potřeba započítat korekci.

Odpory získané substituční metodou jsou mnohem přesnější, protože zde měřím přímo odpor (na rozdíl od předchozí metody, kde jej počítám jako podíl dvou změřených hodnot) a přesnost odporové dekády je vyšší než přesnost měřících přístrojů.

Substituční i přímá metoda dávají v rámci chyby shodné hodnoty odporu.

Při určování koeficientů nelineární regresí nastávají problémy s konvergencí. To, jestli bude algoritmus konvergovat je silně závislé na počátečních hodnotách koeficientů a navíc může existovat více lokálních minim sumy čtverců odchylek, takže není zaručeno, že získané koeficienty budou „nejlepší možné“. Hodnoty, které uvádím v této úloze jsme získal tím, že jsem použil „fyzikálně rozumné“ počáteční hodnoty. Dále už algoritmus celkem dobře konvergoval. Při druhé regresi jsem použil jako počáteční hodnoty koeficienty získané během první regrese.

Fitovaná funkce se od naměřených hodnot odchyluje více, než je chyba měření. To odpovídá výše zmíněným systematickým chybám, plynoucím hlavně ze zanedbání dalších způsobů šíření tepla. Ovšem chyba výsledného odporu je dostat velká, takže předpokládám, že systematické chyby se na jeho hodnotě nijak výrazně neprojeví.

ZÁVĚR: Změřil jsem závislost odporu vlákna žárovky na velikosti protékajícího proudu přímou a substituční metodou. Výsledky obou metod se shodují.

Pomocí programu pro nelineární regresi jsem získal koeficienty ve výrazu (6) a určil odpor vlákna při pokojové teplotě jako $R_0 = (120 \pm 20)\,\Omega$.

V grafu 1 jsou vyneseny výsledky přímého měření odporu a předpokládaná křivka závislosti určená na základě koeficientů získaných regresí. V grafu 2 jsou hodnoty získané substituční metodou a na ně fitovaná závislost. Křivka v grafu 1 naměřené hodnoty dobře vystihuje přestože je počítána z jiné sady dat (získané jinou metodou měření). Z toho usuzuji, že obě metody dávají stejné výsledky a fyzikální model, který jsem použil je v rámci chyb měření dobrý.

LITERATURA:

[1] R. Bakule, J. Šternberk: Fyzikální praktikum II., SPN, Praha 1989
[2] J. Fuka, B. Havelka: Elektřina a magnetismus, SPN, Praha 1979