Martin Beránek, 2.F, X–11

Úloha 18 – Přechodové jevy v RLC obvodu

Pracovní úkol:

1. Sestavte obvod podle obr. 1 a změřte pro obvod v periodickém stavu závislost doby kmitu na velikosti zařazené kapacity.
2. Stanovte hodnoty aperiodizačních odporů pro několik hodnot kapacit zařazeného kondenzátoru.
3. Změřte závislost logaritmického dekrementu na velikosti odporu při konstantní kapacitě v obvodu a porovnejte naměřené hodnoty s vypočítanými podle vztahu (9) [1]. Výsledky měření zpracujte graficky a vysvětlete příčiny rozdílu teoretických a experimentálních hodnot.
4. Změřte závislost relaxační doby obvodu RC na velikosti odporu nebo kapacity v obvodu. Výsledky měření zpracujte graficky a porovnejte s teoretickými.

Teorie: Sériový RLC obvod je popsán rovnicí

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1}$$

Při splnění podmínky

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \tag{2}$$

jsou řešením rovnice (1) tlumené kmity

$$I = \frac{\varepsilon}{BL}\exp\left(-At\right)\sin\left(Bt\right)\,; \qquad A = \frac{R}{2L} \quad \text{a} \quad B^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\,. \tag{3}$$

Perioda T je dána členem $\sin Bt$. Platí

$$2\pi = BT \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{4\pi LC}{\sqrt{4LC - R^2C^2}}\,. \tag{4}$$

Pokud znám kapacitu C a odpor R, mohu ze změřené periody T určit indukčnost zapojené cívky L. Pro danou periodu existují dvě hodnoty indukčnosti, které splňují rovnici (4).

$$L_{1,2} = \frac{T^2 \pm T\sqrt{T^2 - 4\pi^2C^2R^2}}{8\pi^2C}\,. \tag{5}$$

V případě hodnot, které jsem měřil jsou tyto dvě hodnoty řádově různé a L_2 (s minusem) by znamenala velmi velký útlum.

Pokud je tlumení malé a výraz $(4\pi^2C^2R^2)$ je oproti T^2 zanedbatelný (v rámci chyby měření), mohu místo (5) napsat

$$T^2 = 4\pi^2 LC\,, \tag{6}$$

tedy druhá mocnina periody je přímo úměrná kapacitě a koeficient úměrnosti obsahuje hledanou hodnotu indukčnosti.

Pokud pro obvod platí

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}\,, \tag{7}$$

nachází se v mezním aperiodickém stavu. V tomto případě popisuje průběh proudu rovnice

$$I = \frac{\varepsilon}{L}\,t\,\exp\left(-\frac{Rt}{2L}\right)\,. \tag{8}$$

Nedojde tedy vůbec ke kmitání a proud obvodem se beze změny směru nejrychleji ze všech případů klesá k nulové hodnotě. Tento stav se ale podle stopy na osciloskopu obtížně určuje, protože přechod od

periodického stavu s dlouhou periodou (tedy toho, který se blíží k aperiodickému) a přechod od mezně aperiodického k aperiodickém stavu není nijak ostře určen.

Ze vztahu (7) vychází teoretická hodnota potřebného odporu

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{9}$$

Pokud chci určit míru tlumení při periodických kmitech, mohu ji vyjádřit pomocí logaritmického dekrementu útlumu $D = AT$. Hodnotu koeficientu A zjistím podle tvaru obálky průběhu proudu. Ta je dána vztahem

$$C\,\exp\left(-At\right) \qquad \text{a} \qquad -C\,\exp\left(-At\right)\,. \tag{10}$$

Využiji tedy to, že ISES umí proložit určenými body exponenciálu a nechám spočítat hodnotu A při prokládání lokálními maximy proudu.

Podle vztahu (3) by měl být koeficient A přímo úměrný odporu R. Po dosazení za periodu vyjde pro logaritmický dekrement útlumu

$$D = AT = \pi R\sqrt{\frac{C}{L}}\,. \tag{11}$$

Při zapojení obvodu bez cívky se bude po odpojení zdroje kondenzátor vybíjet po exponenciále

$$U = U_0\,\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\,, \tag{12}$$

kde τ je relaxační doba obvodu. Experimentálně její hodnotu zjistím fitováním exponenciály na naměřený průběh proudu. Teoretická hodnota plyne z definice kapacity

$$Q = CU\,. \tag{13}$$

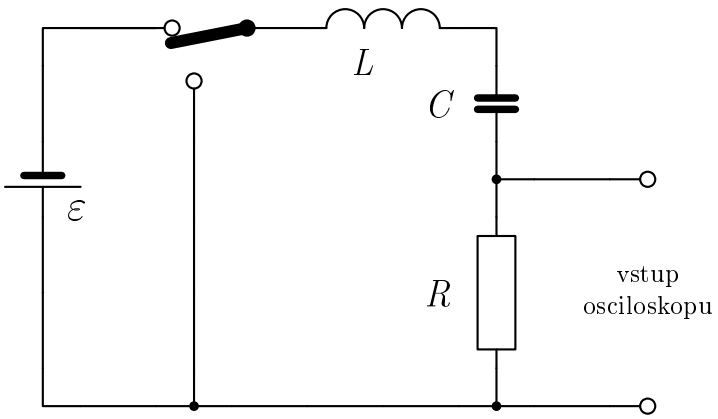
Kondenzátor se vybíjí přes odpor R podle Ohmova zákona, takže

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{U}{R}\,; \qquad -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}\,U\,; \qquad U = U_0\,\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\,. \tag{14}$$

Pro relaxační dobu by tedy teoreticky mělo platit

$$\tau = RC\,. \tag{15}$$

Měření: Obvod jsme zapojil podle obrázku 1. Po nabití kondenzátoru jsme dal přepnutím přepínače obvodu počáteční impuls a dále pozoroval chování při $\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = 0$. Jako paměťový osciloskop sloužil měřící systém ISES. Údaje o přesnosti jeho vstupů se mi nepodařilo zjistit, ale předpokládám, že největší chyba je způsobena odečítáním naměřených hodnot z obrazovky s relativně malým rozlišením. Vzhledem k tomu, že jsme měřil napětí na odporu při relativně nízkých frekvencích mohu předpokládat, že platí dostatečně přesně Ohmův zákon a naměřené hodnoty považovat za přímo úměrné proudu procházejícímu obvodem.



Obrázek 1 – zapojení experimentu

Při prvním měření jsme zjišťoval periodu kmitů RLC obvodu v oscilujícím stavu při různých hodnotách kapacity. Měřil jsme dobu deseti kmitů. Hodnota odporu byla ve všech případech $R = 50\,\Omega$. Nepřesnost odečtení časového intervalu na obrazovce odhaduji na $\pm 0{,}4\,\mathrm{ms}$. Nepřesnosti odporové a kapacitní dekády považuji za zanedbatelně malé. Ostatní chyby jsou náhodné způsobené vnějšími elektromagnetickými poli a podobnými vlivy. Pro každou hodnotu odporu jsme měřil periodu pětkrát. Získané hodnoty jsou v tabulce 1. Chyba určení periody obsahuje nepřesnost odečtu z obrazovky i statistickou chybu.

$C\,[\mu\mathrm{F}]$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$T\,[\mathrm{ms}]$	3,62	4,45	5,16	5,64	6,21	6,73	7,24	7,71	8,11
$\Delta T\,[\mathrm{ms}]$	0,04	0,04	0,04	0,04	0,07	0,08	0,08	0,05	0,06

Tabulka 1

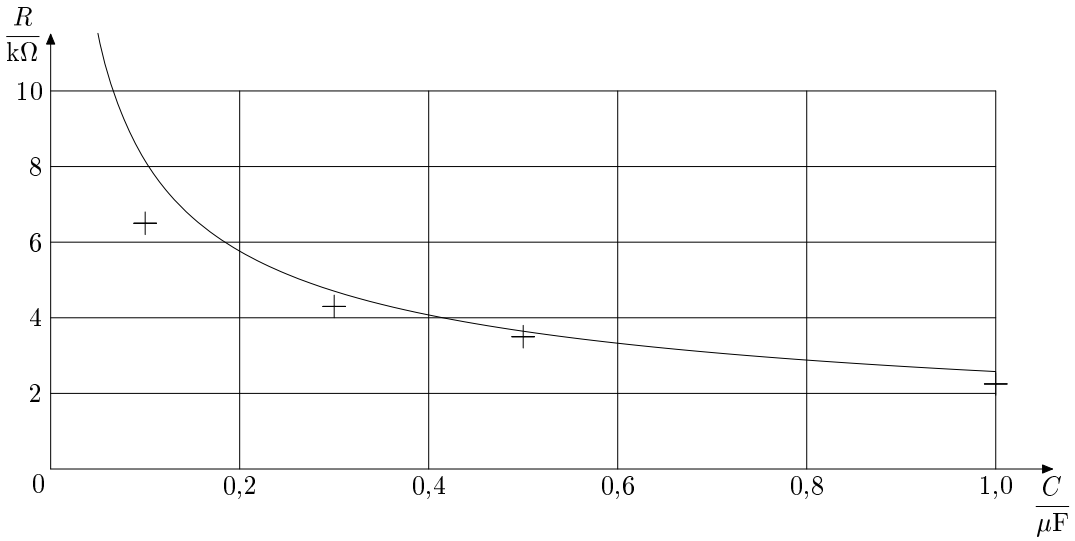
Pro další výpočet indukčnosti cívky použiji linearizovaný vztah (6). Chyba tím způsobená je maximálně dvě desetiny procenta a na přesnost výsledku nemá vliv. Koeficient úměrnosti mezi C a T^2 jsem získal lineární regresí. Podle vztahů pro lineární regresi jsme také z odchylek T^2 určil odchylku výsledného koeficientu. Pro $T^2 = aC$ vyjde

$$a = (65{,}4 \pm 0{,}5)\,\mathrm{H}\,.$$

Po vydělení $4\pi^2$ vyjde hledaná indukčnost použité cívky

$$L = (1{,}66 \pm 0{,}01)\,\mathrm{H}\,.$$

Jak už jsme zmínil v teoretické části, určování aperiodizačního odporu podle změny průběhu proudu na obrazovce osciloskopu je dost obtížné a zatížené velkou chybou. Pokusil jsme se určit hodnotu odporu pro čtyři různé zapojené kapacity. Skutečnou chybu jsem při odhadu pravděpodobně dost podcenil. Určené hodnoty a teoretická závislost podle vztahu (9) je v grafu 1.



Graf 1 – hodnoty aperiodizačního odporu

Ze známých hodnot aperiodizačních odporů pro různé kapacity se dá podle vztahu (9) určit indukčnost použité cívky. Prakticky se tu ale projevuje velká chyba a přesnost je řádově nižší než v předchozí metodě. Ze čtyř změřených hodnot vychází průměrně $L = 1{,}3\,\mathrm{H}$, ale vzhledem k chybě jde spíš o řádový odhad.

Dále jsem měřil tlumení kmitů RLC obvodu s kapacitou $C = 0,\mu\mathrm{F}$. Využil jsem k tomu možnosti systému ISES, kdy lze vybranými body proložit danou funkci. Vybral jsem tedy maxima naměřeného

průběhu proudu a nechal jimi proložit exponenciálu. ISES počítá koeficienty a nějakou chybu, ovšem její význam není nikde napsán, takže jako chybu koeficientu exponenciály budu brát pouze statistickou odchylku pěti výsledků pro každou hodnotu odporu. Měřil jsem pro pět různých hodnot odporů. Výsledné průměrné koeficienty A a jejich statistická chyba pro jednotlivé hodnoty odporů jsou uvedeny v tabulce 2. V posledním řádku je uveden logaritmický dekrement útlumu. Periodu jsem spočítal podle vztahu (6) s indukčností uvedenou výše. Tedy $T = (2{,}56 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}$.

$R\,[\Omega]$	50	100	200	300	400
$A\,[\mathrm{s}^{-1}]$	85	105	141	160	200
$\Delta A\,[\mathrm{s}^{-1}]$	4	4	5	10	20
D	0,22	0,27	0,36	0,42	0,50
ΔD	0,01	0,01	0,01	0,04	0,05

Tabulka 2

Logaritmický dekrement odpovídá ztrátě energie za jednu periodu. Rezistor se chová podle Ohmova zákona, takže ztráty na něm musí být úměrné jeho velikosti. V předchozích měřeních jsem měnil pouze odpor, takže získané hodnoty logaritmického dekrementu musí být úměrné R. Provedu lineární regresi s předpisem $D = aR + b$. Získané hodnoty jsou

$$a = (0{,}79 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-3}\,\Omega^{-1} \qquad \text{a} \qquad b = 0{,}19 \pm 0{,}01\,.$$

Teoretická hodnota D podle vztahu (11) je

$$D_{\mathrm{teor}} = 0{,}77 \cdot 10^{-3} R\,.$$

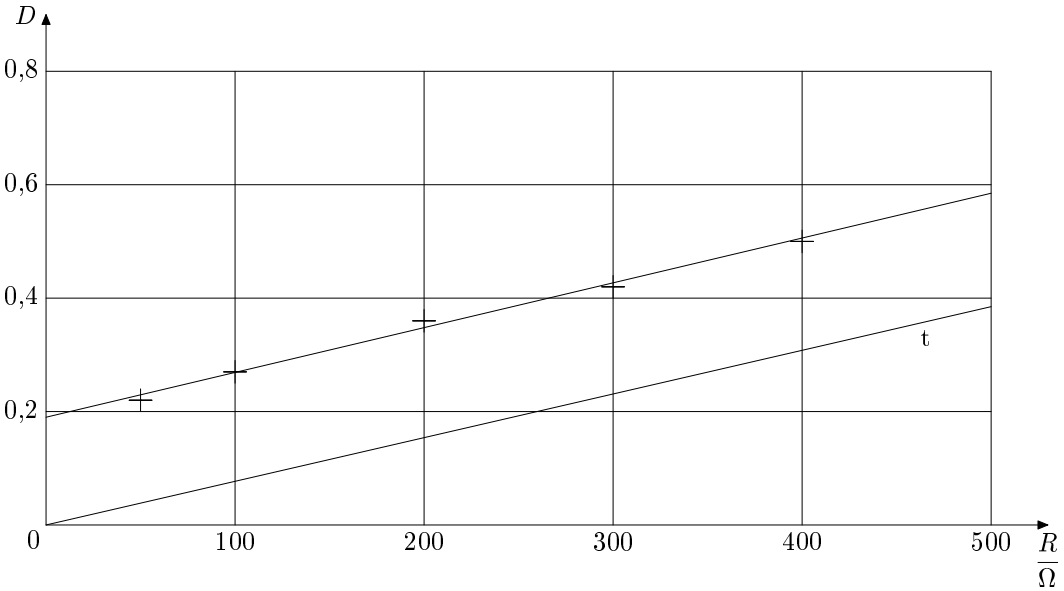
Předpokládaná lineární závislost je tedy velmi dobře splněna, ale musím vysvětlit přebývající absolutní člen u experimentálních údajů. Ten se dá chápat také tak, že si napíšu alternativní rovnici

$$D = a\,(R + R_0)\,,$$

ve které je R_0 odpor obvodu bez zapojeného rezistoru. Tedy hlavně vnitřní odpor cívky. Vychází

$$R_0 = \frac{b}{a} = (240 \pm 20)\,\Omega\,.$$

Naměřené hodnoty a proložená lineární závislost je v grafu 2. Přímka označená „t“ je teoretická závislost dekrementu bez započítání vnitřního odporu cívky.



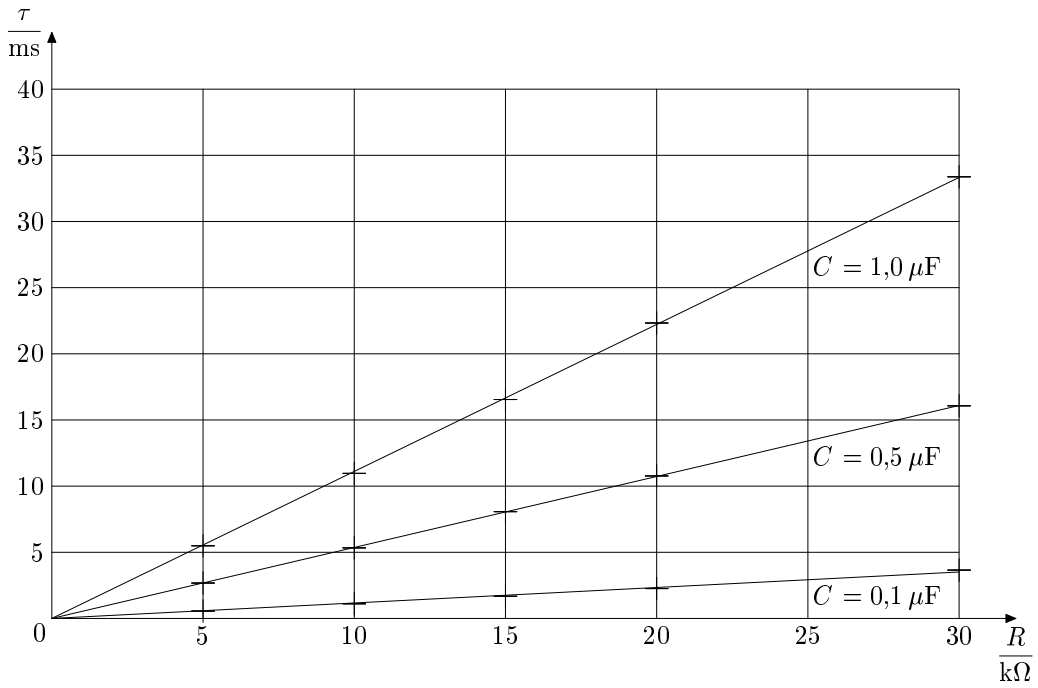
Graf 2 – závislost logaritmického dekrementu útlumu na odporu

Poslední měření bylo pouze s RC obvodem (tedy po odpojení cívky). Pro tři různé hodnoty kapacity jsem určoval závislost relaxační doby obvodu na zařazeném odporu. Koeficient v exponenciále jsem opět získal pomocí regresních funkcí systému ISES. Pro každou kapacitu jsem získané hodnoty fitoval předpisem $\tau = aR + b$. Podle teoretických výsledků by měl být koeficient b nulový a a roven použité kapacitě. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3. V posledních dvou sloupcích je koeficient pro přímou úměrnost.

C [μF]	a [μF]	Δa [μF]	b [ms]	Δb [ms]	a_0 [μF]	Δa_0 [μF]
0,1	0,124	0,004	−0,13	0,08	0,117	0,002
0,5	0,537	0,002	−0,002	0,034	0,5365	0,0008
1,0	1,119	0,005	−0,16	0,09	1,111	0,003

Tabulka 3

Absolutní členy sice mohou mít nějaké fyzikální vysvětlení jako svodový proud kondenzátoru, nebo v případě kladného znaménka odpor použitých vodičů, ale v tomto případě jsou velmi malé a myslím, že jsou způsobeny pouze statistickými chybami. Takže myslím, že naměřené údaje jsou lépe vystiženy vztahem $\tau = a_0 R$. Z naměřených hodnot vychází relaxační doba ve všech třech případech asi o deset procent vyšší, než je teoreticky určená hodnota. Jednotlivé hodnoty a proložené přímky jsou v grafu 3.

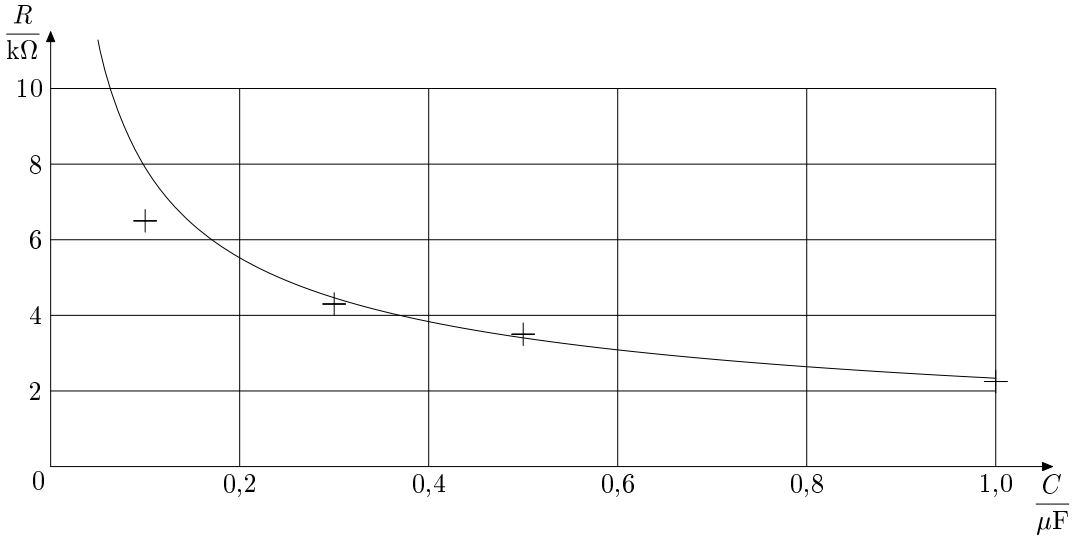


Graf 3 – relaxační doba RC obvodu

Diskuze: Indukčnost použité cívky bylo možno z měření periody kmitů určit velmi přesně a do měření ani příliš nezasahují žádné systematické chyby. Cívka měla 1200 závitů a rozměry přibližně 10 cm ve všech směrech. Přibližným výpočtem je možné získat řádový odhad indukčnosti, který odpovídá naměřené hodnotě.

Z grafu 1 je vidět, že hodnoty aperiodizačních odporů teoretické křivce příliš neodpovídají. Ale vztah (9) je odvozen bez uvážení vnitřního odporu cívky. Jeho hodnota je přibližně $R_0 = 240\,\Omega$. O tuto hodnotu posunu spočítanou křivku. Výsledek je v grafu 4. V tomto případě už tři naměřené hodnoty velmi dobře odpovídají teoretické křivce. Čtvrtou naměřenou hodnotu mohu považovat za hrubou chybu, ale pro korektní zpracování nemám dost naměřených údajů.

Při měření útlumu RLC obvodu bylo možné poměrně přesně určit hodnotu vnitřního odporu cívky. Při započítání této korekce naměřené hodnoty v rámci chyby odpovídají teoretickým.



Graf 4 – závislost logaritmického dekrementu útlumu na odporu se započítaným odporem cívky

Změřená relaxační doba RC obvodu je vyšší než teoretická. Část může být zahrnuta do chyby měření, kterou nejsem schopný přesně vyjádřit, protože neznám přesnost systému ISES ani přesnost hodnot získaných regresí. Ale vzhledem k tomu, že změřené body leží velmi blízko proložené přímky, je náhodná chyba nepravděpodobná. Systematická chyba může být způsobena některými vlastnostmi kondenzátoru, které nejsou zahrnuty v teoretických výpočtech. Konkrétní důvod zjištěného rozdílu ale nejsem schopný určit.

ZÁVĚR: Zjistil jsem, že cívka s 1200 závity použitá k měření má indukčnost $L = (1{,}66 \pm 0{,}01)$ H a vnitřní odpor $R_0 = (240 \pm 20)\,\Omega$.

Hodnoty aperiodizačních odporů nelze z průběhu proudu (napětí) v obvodu určit příliš přesně. Po započtení korekce ale v rámci chyby odpovídají teoretickým hodnotám. Jednu hodnotu odporu, která se podstatně liší považuji za hrubou chybu měření.

Změřená relaxační doba RC obvodu se mírně liší od teoretické hodnoty, ale nejsem schopný určit konkrétní příčinu. Změřené hodnoty jsou uvedeny v grafu 3.

LITERATURA:

[1] R. Bakule, J. Šternberk: Fyzikální praktikum II. SPN, Praha 1989