Martin Beránek, 1.F, X–11

XXI. Měření tíhového zrychlení

PRACOVNÍ ÚKOL:

1. Změřte místní tíhové zrychlení g metodou reverzního kyvadla.
2. Změřte místní tíhové zrychlení metodou matematického kyvadla.
3. Vypočítejte chybu, které se dopouštíte idealizací reálného kyvadla v rámci modelu kyvadla matematického.

TEORIE: Při omezení se na malé výchylky platí pro periodu kyvadla, kývajícího se kolem osy ve vzdálenosti a od těžiště

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_\mathrm{T} + ma^2}{mga}}, \tag{1}$$

kde J_T je moment setrvačnosti kyvadla vůči ose procházející těžištěm a m jeho hmotnost. Při měření je použito kyvadlo, které se může otáčet kolem dvou os v pevné vzdálenosti d a mění se poloha těžiště. Tedy

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\mathrm{T} + mx^2}{mgx}}, \tag{2}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_\mathrm{T} + m(d-x)^2}{mg(d-x)}}, \tag{3}$$

kde x je vzdálenost těžiště od jedné z os. Za podmínky $T = T_1 = T_2$ vychází dvě řešení rovnic (2) a (3)

$$d_1 = 2x \qquad \text{a} \qquad d_2 = x + \frac{J_\mathrm{T}}{mx}.$$

První řešení odpovídá situaci, kdy je těžiště uprostřed mezi hroty. Z experimentálního uspořádání je zjevné, že tato situace nenastane. Hodnota d_2 odpovídá redukované délce fyzického kyvadla. Když vyjádřím x pomocí d a dosadím do (2), vyjde pro periodu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g}} \tag{4}$$

a tedy

$$g = \frac{4\pi^2 d}{T^2}. \tag{5}$$

Závislosti T_1 a T_2 na x mohu pro účely hledání polohy těžiště při které bude vzdálenost hrotů redukovanou délkou aproximovat lineárně. Pak stačí změřit periody kyvů kolem obou os pro dvě polohy těžiště a spočítat průsečík přímek daných těmito hodnotami. Tím získám další polohu těžiště. Pro malou přesnost určení polohy závaží je pak dále nejlepší vyjít ze skutečnosti, že v okolí hledané polohy těžiště se funkce $T_1(x)$ a $T_2(x)$ protínají právě jednou. Najdu tedy dvě polohy x_1 a x_2, pro které platí $T_1(x_1) > T_2(x_1)$ a $T_1(x_2) < T_2(x_2)$. Hledaná hodnota x pak bude určitě ležet mezi x_1 a x_2. Změřím jí odpovídající periody a postup opakuji tak dlouho, dokud nebude rozdíl T_1 a T_2 pod chybou měření.

Pro periodu kyvů matematického kyvadla platí při malých výchylkách

$$T_\mathrm{M} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{6}$$

kde l je délka matematického kyvadla. Tíhové zrychlení tedy spočtu

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T_\mathrm{M}^2}. \tag{7}$$

Vztah (6) neodpovídá přesně reálnému experimentálnímu uspořádání. Moment setrvačnosti matematického kyvadla se předpokládá $J_\mathrm{M} = ml^2$. Ve skutečnosti je dán momentem setrvačnosti koule a niti, na které je zavěšená. Nit má délku d a koule poloměr r. Moment setrvačnosti koule o hmotnosti m_1 je

$$J_1 = m_1 \left(\frac{2}{5} r^2 + (d + r)^2 \right) . \tag{8}$$

Nit o hmotnosti m_2 a délce d kývající se kolem svého konce má moment setrvačnosti

$$J_2 = \frac{1}{3} m_2 d^2 . \tag{9}$$

Rovnici (7) je tedy potřeba zkorigovat vynásobením výrazem $(J_1 + J_2)/J_\mathrm{M}$.

Druhá oprava vychází ze započítání amplitudy kmitů. Vztah (7) je potřeba vynásobit výrazem $\left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2$ (viz [1], str. 125).

MĚŘENÍ: Nejprve jsem změřil dobu deseti kmitů fyzického kyvadla pro dvě vzdálenosti čočky od hrotu l_A a l_B.

$l_\mathrm{A} = 77{,}2\,\mathrm{mm}$	$l_\mathrm{B} = 37{,}7\,\mathrm{mm}$
$t_{\mathrm{A}1} = 20{,}10\,\mathrm{s}$	$t_{\mathrm{B}1} = 19{,}79\,\mathrm{s}$
$t_{\mathrm{A}2} = 20{,}40\,\mathrm{s}$	$t_{\mathrm{B}2} = 18{,}64\,\mathrm{s}$

Vyřešením soustavy dvou rovnic

$$t' = t_{\mathrm{B}1} + (t_{\mathrm{A}1} - t_{\mathrm{B}1}) \frac{l' - l_\mathrm{B}}{l_\mathrm{A} - l_\mathrm{B}} \qquad \text{a} \qquad t' = t_{\mathrm{B}2} + (t_{\mathrm{A}2} - t_{\mathrm{B}2}) \frac{l' - l_\mathrm{B}}{l_\mathrm{A} - l_\mathrm{B}}$$

získám novou hodnotu $l' = 68{,}95\,\mathrm{mm}$. Změřil jsem dobu trvání 15 kmitů při této poloze čočky

t_1		t_2
30,052 s	$>$	29,980 s
30,046 s		29,979 s

Vidím, že je potřeba posunout čočku tak, aby se vzdálenost l zvětšila. Při hodnotě přibližně 70,25 mm jsem získal tyto časy 15 kmitů

t_1		t_2
30,068 s	$<$	30,084 s
30,068 s		30,085 s

Posunu tedy čočku opět o něco zpátky a pro vzdálenost přibližně 69,6 mm jsem naměřil následující časy

t_1		t_2
30,062 s	$>$	30,039 s
30,062 s		30,040 s

Po dalším posunutí

t_1		t_2
30,068 s	$>$	30,064 s
30,068 s		30,064 s

Při následující poloze čočky už byly rozdíly časů v mezích statistické chyby

t_1	t_2
30,0644 s	30,0650 s
30,0638 s	30,0643 s
30,0650 s	30,0640 s
30,0646 s	30,0635 s
30,0641 s	30,0657 s

Průměrná hodnota doby jednoho kmitu je

$$T = (2{,}0043 \pm 0{,}0005)\,\mathrm{s} .$$

Chybu v tomto případě počítám značně větší, než je chyba daná rozptylem naměřených hodnot a chybou přístroje, protože periody kmitů kolem obou os se mění téměř stejně a i malá odchylka času způsobí poměrně velké posunutí bodu, kde se obě periody rovnají.

Vzdálenost hrotů jsem určil jako

$$d = (0{,}995 \pm 0{,}001)\,\mathrm{m}\,.$$

Podle vztahu (5) pak pro tíhové zrychlení vychází

$$g = (9{,}78 \pm 0{,}01)\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

Matematické kyvadlo jsem aproximoval koulí o poloměru $r = (11{,}9 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$ a hmotnosti $m_1 = (55{,}5646 \pm 0{,}0005)\,\mathrm{g}$.

Délka závěsu byla $d = (0{,}999 \pm 0{,}002)\,\mathrm{m}$ a jeho hmotnost $m_2 = (0{,}2685 \pm 0{,}0005)\,\mathrm{g}$.

Vzhledem k nízké hmotnosti závěsu předpokládám, že těžiště leží ve středu koule, takže

$$l = (1{,}011 \pm 0{,}002)\,\mathrm{m}\,.$$

měření	1	2	3	4	5
$\mathbf{T_{30}}$ [s]	60,315	60,310	60,304	60,299	60,296
$\mathbf{\Delta T_{30}}$ [s]	0,010	0,005	−0,001	−0,006	−0,009

Tabulka 1

Naměřené časy 30 kmitů jsou v tabulce 1. Průměrná hodnota je 60,305 s a pro dobu jednoho kmitu

$$T_\mathrm{M} = (2{,}0102 \pm 0{,}0003)\,\mathrm{s}\,.$$

Podle vztahu (7) pak určím tíhové zrychlení

$$g = (9{,}88 \pm 0{,}02)\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

Skutečný moment setrvačnosti koule zavěšené na niti je dle vztahů (8) a (9)

$$J = J_1 + J_2 = (56{,}9 \pm 0{,}2)\,\mathrm{g\,m^2}\,.$$

Moment matematického kyvadla o délce l a hmotnosti $(m_1 + m_2)$ je $J_\mathrm{M} = (57{,}1 \pm 0{,}2)\,\mathrm{g\,m^2}$, takže korekční člen

$$\frac{J}{J_\mathrm{M}} = 0{,}9965$$

a opravená hodnota tíhového zrychlení

$$g' = g \cdot \frac{J}{J_\mathrm{M}} = (9{,}84 \pm 0{,}04)\,\mathrm{m\,s^{-2}}\,.$$

Kyvadlo konalo výchylky přibližně 2,5 cm na obě strany při délce závěsu přibližně 1 m, takže korekci úhlu mohu vzhledem k chybě g' zanedbat.

DISKUZE: Tíhové zrychlení určené pomocí matematického kyvadla jsem zkorigoval s ohledem na skutečný moment setrvačnosti použitého kyvadla a poté se v rámci chyby shoduje s hodnotou pro Prahu uvedenou v [2]. Při přesnějším měření by se projevilo i tlumení dané odporem vzduchu, ale vzhledem k chybě, se kterou mi tíhové zrychlení vyšlo jej mohu zanedbat.

Při měření pomocí reversního kyvadla se výsledná hodnota s tabulkovou neshoduje ani v rámci chyby měření. Při využívání této metody je potřeba najít bod, kde periody kmitů kolem obou os stejnou hodnotu. Závislosti periody na posunutí zátěže pro obě polohy kyvadla mají téměř stejnou směrnici, takže stačí malá nepřesnost měření času a hledaný bod se značně posune. Jistý vliv má pravděpodobně skutečnost, že při jednom měření je posuvné závaží nahoře a jednou dole. To může způsobit nestejné

protažení kyvadla a tedy změnu polohy těžiště. Navíc je pravděpodobné, že i samotné závaží se při převrácení trochu posune po šroubu na kterém je upevněno.

ZÁVĚR: Při měření pomocí reversního kyvadla se mi nepodařilo započítat všechny systematické chyby, takže změřená hodnota se neshoduje s tabulkovou.

Hodnota g získaná měřením matematickým kyvadlem bez započítání korekcí se liší od tabulkové, ale po započtení korekce momentu setrvačnosti je s ní v dobré shodě. Korekce na amplitudu kmitů už nemá vzhledem k chybě výsledné hodnoty žádný význam.

LITERATURA:

[1] D. Slavínská, I. Stulíková, P. Vostrý: Fyzikální praktikum I. SPN, Praha 1989
[2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky SNTL, Praha 1980