Martin Beránek, 1.F, X–11

II. Harmonické kmity mechanického oscilátoru

TEORIE: Pružiny se ve zkoumaném rozmezí sil na ně působících chovají lineárně – tj. délka pružiny je lineární funkcí síly, která ji napíná. Délku pružiny jsem měřil katetometrem, který měl stupnici značenou vzestupně směrem nahoru, ale pružina se prodlužuje v opačném směru, takže před hodnoty y-ové souřadnice přidám minus. Tedy

$$F = k(y_0 - y)\,, \tag{1}$$

kde y_0 je délka pružiny bez zátěže, k tuhost pružiny a F působící síla. Délka y_0 se měří dost obtížně, protože nezatížená pružina se různě kroutí a rozhodně není všude přesně svislá, takže použiji naměřené délky a odpovídající zátěže a lineární regresí zjistím jak konstantu úměrnosti, tak hodnotu y_0. Pomocí programu R jsem dopočítal konstanty závislosti y na m podle předpisu

$$y = A + Bm\,. \tag{2}$$

Je vidět, že hodnota A odpovídá y_0 a hodnotu B vyjádřím podle (1) jako

$$B = \frac{g}{k}\,. \tag{3}$$

Za předpokladu znalosti g mohu pak určit tuhost pružiny k statickou metodou.

Dynamická metoda určení tuhosti vychází ze zjištění periody kmitů zatížené pružiny. Vyřešením diferenciální rovnice harmonického oscilátoru získám vztah

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,, \qquad k = m\omega^2\,, \tag{4}$$

kde $\omega = 2\pi/T$. Měřil jsem dobu, za kterou oscilátor vykoná určitý počet kmitů (konkrétně dvacet kmitů), z toho určím ω^2, hmotnost m znám dostatečně přesně (kalibrovaná závaží) a mohu spočítat tuhost k.

MĚŘENÍ: Měl jsem k dispozici pět různých pružin, které budu značit čísly **1** až **5**. Nejprve jsem katetometrem určoval závislost polohy závaží y na hmotnosti zavěšeného závaží m.

- Pružina **1**

m [g]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y [cm]	43,27	41,07	38,65	36,07	33,63	31,09	28,61	26,10	23,67	21,25

110	120	130	140	150	160
18,71	16,24	13,87	11,40	8,99	6,71

Lineární regresí získám hodnoty $A = 0{,}4587\,\mathrm{m}$ a $B = -2{,}460\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$. Zajímá mne tuhost, takže ji spočítám podle vzorce (3) s pomocí tabulkové hodnoty $g = (9{,}81077 \pm 0{,}000005)\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (hodnota pro Prahu). Statistická chyba regrese je $\pm 0{,}0055\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$. Vidím, že chyba určení g je zanedbatelně malá, takže výsledná tuhost

$$\underline{\underline{k_1 = (3{,}988 \pm 0{,}009)\,\mathrm{kg\,s^{-2}}}}\,.$$

- Pružina **2**

m [g]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	120
y [cm]	27,58	26,81	26,06	25,33	24,59	23,86	23,15	22,41	21,64	20,94	19,46

140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340
18,02	16,61	15,19	13,76	12,26	10,91	9,45	8,02	6,57	5,10	3,70

Regresí $A = 0{,}2820\,\mathrm{m}$ a $B = -0{,}7218\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$. Statistická chyba je $\pm 0{,}00095\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$ a výsledná tuhost analogicky jako v předchozím případě

$$\underline{\underline{k_2 = (13{,}59 \pm 0{,}02)\,\mathrm{kg\,s^{-2}}}}\,.$$

- Pružina **3**

m [g]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y [cm]	31,61	30,04	28,33	26,73	25,13	23,54	21,97	20,47	18,83	17,34

110	120	130	140	150
15,82	14,22	12,78	11,29	9,79

Regresí $A = 0{,}3300\,\mathrm{m}$ a $B = -1{,}559\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$. Statistická chyba regrese je $\pm 0{,}0067\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$ a výsledná tuhost

$$\underline{\underline{k_3 = (6{,}29 \pm 0{,}03)\,\mathrm{kg\,s^{-2}}}}\,.$$

- Pružina **4**

m [g]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y [cm]	36,50	35,17	33,80	32,43	31,13	29,77	28,38	27,07	25,73	24,40

120	140	160	180	200	220	240
21,71	19,06	16,34	13,64	10,96	8,25	5,50

Regresí $A = 0{,}3784\,\mathrm{m}$ a $B = -1{,}3452\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$. Statistická chyba je $\pm 0{,}00093\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$ a výsledná tuhost

$$\underline{\underline{k_4 = (7{,}293 \pm 0{,}005)\,\mathrm{kg\,s^{-2}}}}\,.$$

- Pružina **5**

m [g]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
y [cm]	38,19	36,87	35,45	34,14	32,79	31,42	30,09	28,72	27,36	26,02

120	140	160
23,37	20,66	17,94

Regresí $A = 0{,}3953\,\mathrm{m}$ a $B = -1{,}3492\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$. Statistická chyba regrese je $\pm 0{,}0014\,\mathrm{m\,kg^{-1}}$ a výsledná tuhost

$$\underline{\underline{k_5 = (7{,}271 \pm 0{,}007)\,\mathrm{kg\,s^{-2}}}}\,.$$

Dynamická metoda určování tuhosti pružin. Ze změřených dob trvání dvaceti kmitů oscilátoru t_{20} spočítám tuhost podle vzorce (4). Nepřesnost určení času je dána hlavně reakční dobou při zastavování stopek. Předpokládám hodnotu $\pm 0{,}5\,\mathrm{s}$, takže odchylka $\sigma_{\mathrm{odh}} = 0{,}167\,\mathrm{s}$. Měřil jsem časové úseky přibližně 15 sekund a při výpočtu ω^2 používám druhou mocninu naměřeného času. Sečtením čtverců relativních chyb tedy získám relativní chybu určení ω^2 (a také k, protože předpokládám, že hmotnost závaží znám s dostatečně velkou přesností) $\eta_{\mathrm{odh}} = 0{,}016$.

- Pružina **1**

$\mathbf{m}$ [g]	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$\mathbf{t_{20}}$ [s]	8,94	11,22	12,89	14,29	15,58	16,84	18,04	18,97	20,01
ω^2 [s^{-2}]	197,58	125,44	95,04	77,33	65,06	55,68	48,52	43,88	39,44
$\mathbf{k}$ [$\mathrm{kg\,s}^{-2}$]	3,9516	3,7632	3,8017	3,8666	3,9033	3,8979	3,8818	3,9494	3,9439

$$\underline{\underline{k_1 = (3{,}88 \pm 0{,}06)\ \mathrm{kg\,s}^{-2}}}.$$

- Pružina **2**

$\mathbf{m}$ [g]	160	180	200	220	240	260
$\mathbf{t_{20}}$ [s]	13,70	14,52	15,20	15,95	16,60	17,18
ω^2 [s^{-2}]	84,14	74,90	68,35	62,07	57,31	53,50
$\mathbf{k}$ [$\mathrm{kg\,s}^{-2}$]	13,4617	13,4822	13,6698	13,6559	13,7536	13,9106

$$\underline{\underline{k_2 = (13{,}7 \pm 0{,}2)\ \mathrm{kg\,s}^{-2}}}.$$

- Pružina **3**

$\mathbf{m}$ [g]	50	60	70	80	90	100	120	140
$\mathbf{t_{20}}$ [s]	11,57	12,46	13,33	14,13	14,93	15,96	16,94	18,20
ω^2 [s^{-2}]	117,96	101,71	88,87	79,09	70,84	61,99	55,03	47,67
$\mathbf{k}$ [$\mathrm{kg\,s}^{-2}$]	5,8982	6,1029	6,2210	6,3274	6,3759	6,1995	6,6035	6,6743

$$\underline{\underline{k_3 = (6{,}30 \pm 0{,}12)\ \mathrm{kg\,s}^{-2}}}.$$

- Pružina **4**

$\mathbf{m}$ [g]	50	60	70	80	90	100	120	140	160	200
$\mathbf{t_{20}}$ [s]	10,72	11,64	12,59	13,36	14,27	14,89	16,28	17,52	18,69	20,87
ω^2 [s^{-2}]	137,41	116,55	99,62	88,47	77,55	71,22	59,58	51,45	45,21	36,26
$\mathbf{k}$ [$\mathrm{kg\,s}^{-2}$]	6,8707	6,9930	6,9737	7,0778	6,9793	7,1225	7,1498	7,2024	7,2330	7,2511

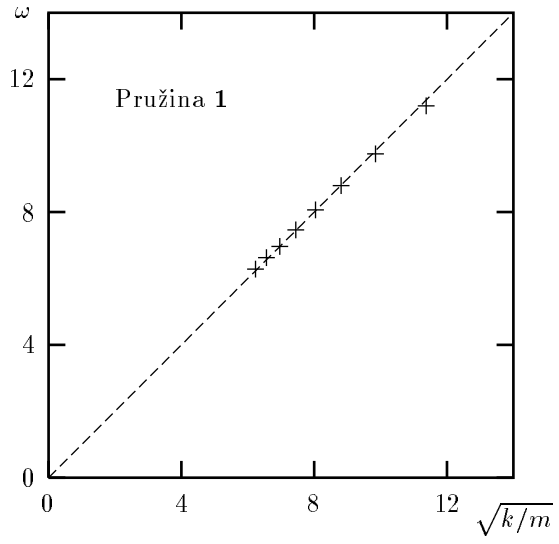
$$\underline{\underline{k_4 = (7{,}08 \pm 0{,}12)\ \mathrm{kg\,s}^{-2}}}.$$

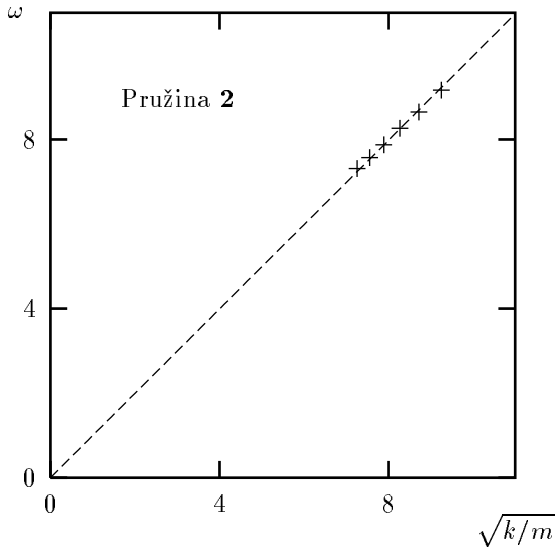
- Pružina **5**

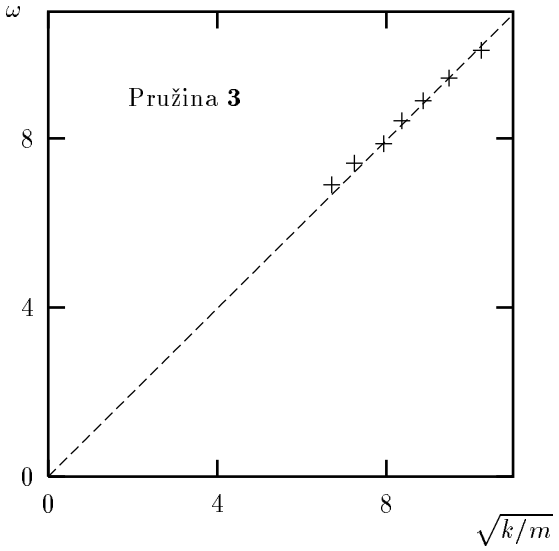
$\mathbf{m}$ [g]	50	60	70	80	90	100	120	140	160
$\mathbf{t_{20}}$ [s]	10,78	11,67	12,75	13,32	14,16	14,94	16,21	17,53	18,81
ω^2 [s^{-2}]	135,89	115,95	97,14	89,00	78,76	70,75	60,10	51,39	44,63
$\mathbf{k}$ [$\mathrm{kg\,s}^{-2}$]	6,7944	6,9571	6,7998	7,1203	7,0882	7,0749	7,2117	7,1942	7,1411

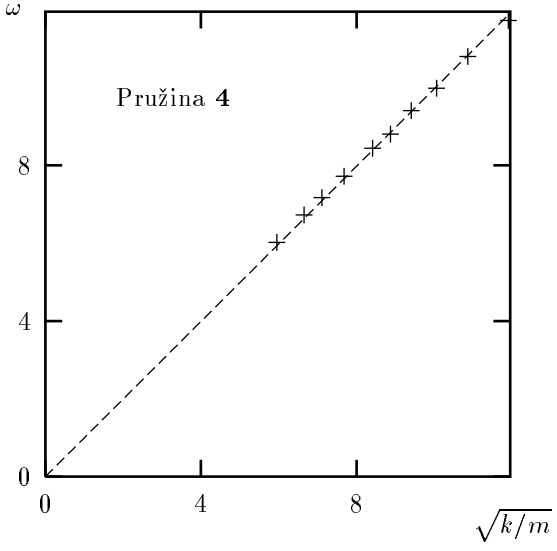
$$\underline{\underline{k_5 = (7{,}04 \pm 0{,}12)\ \mathrm{kg\,s}^{-2}}}.$$

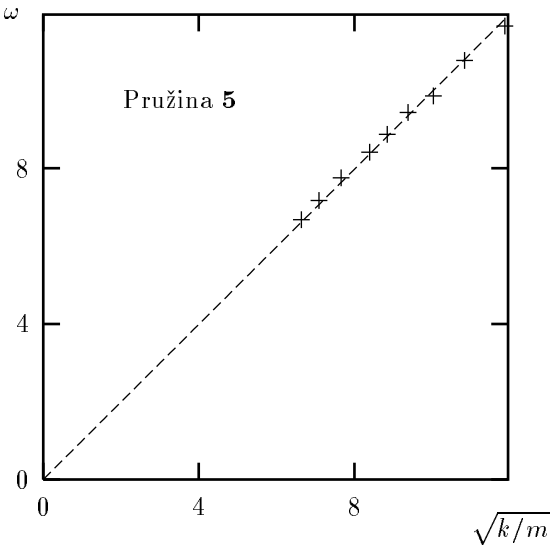
Grafy závislostí $\omega = f\left(\sqrt{k/m}\right)$ pro pružiny **1** až **5** a odpovídající naměřené hodnoty.



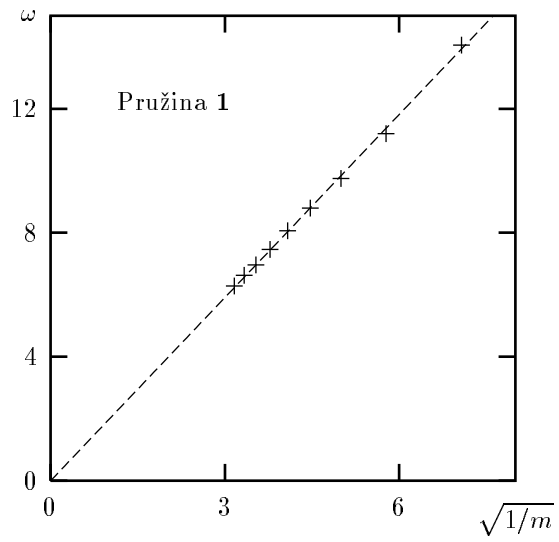


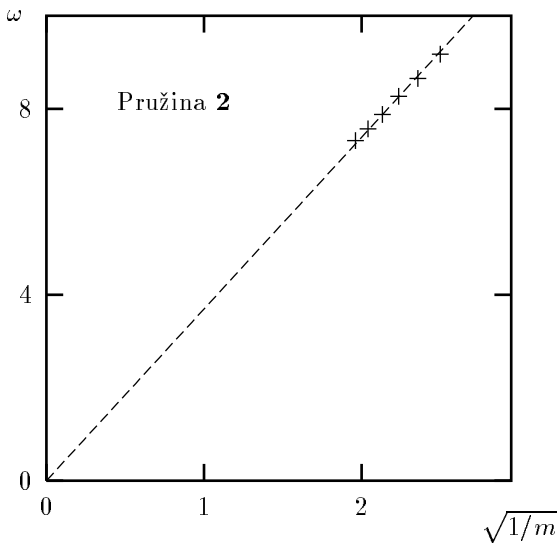


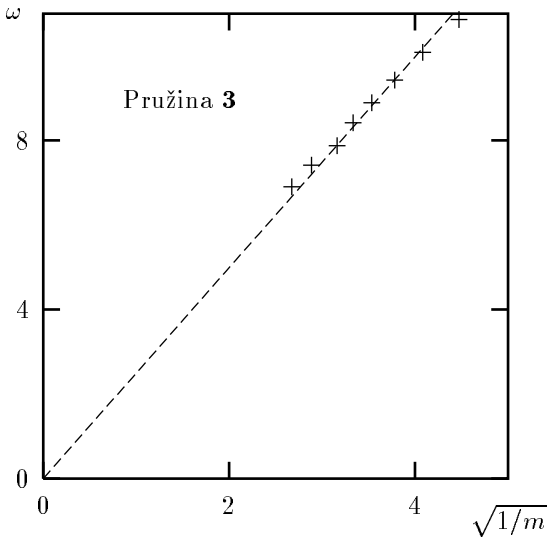


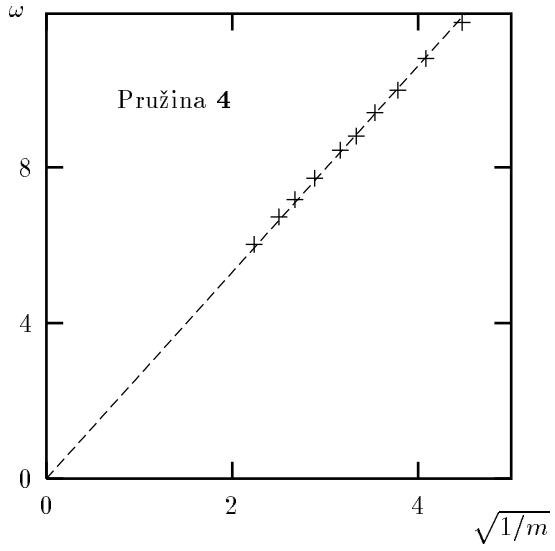


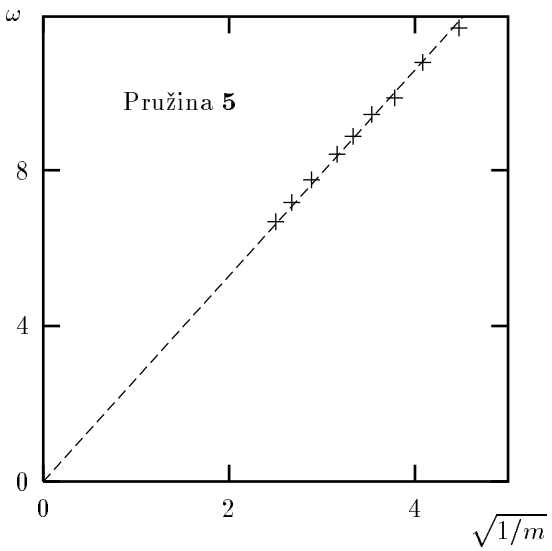
A závislostí $\omega = f\left(\sqrt{1/m}\right)$ pro pružiny **1** až **5** a odpovídající naměřené hodnoty.











ZÁVĚR: Díky lineární regresi je statická odchylka určení tuhosti statickou metodou poměrně nízká. Výslednou tuhost podle dynamické metody jsme určil spočítáním průměru, ale hodnoty získané lineární regresí jsou velmi blízké (pouze na rozdíl od průměru také zohlední to, že by výsledná závislost měla procházet počátkem).

Nelze si nevšimnout, že mimo pružin **2** a **3** se získané hodnoty tuhosti navzájem dost liší a v rozmezí chyby se ani nepřekrývají. Napadají mě následující možnosti, jak toto vysvětlit. Vzhledem k malé statistické chybě je jasné, že problém bude někde ve fyzikálním modelu nebo použité metodě.

První problém je, jestli je lineární model chování pružiny skutečně správný. Ale když se podívám na odchylky naměřených hodnot od grafu získaného lineární regresí, vidím, že jsou rozmístěny přibližně rovnoměrně na obou stranách, takže mohu lineární model považovat za dostatečně přesný.

Dále je možné, že část deformace pružiny při měření statickou metodou byla už stálou deformací a tudíž jsme při druhém měření zjišťoval tuhost pružin s trochu jinými parametry.

Velmi pravděpodobné je, že alespoň část zjištěného rozdílu způsobilo to, že při měření dynamickou metodou se závaží nepohybovalo pouze vertikálně, ale opisovalo jakousi elipsu. To bylo způsobené tím, že jsem jej nedokázal před vypuštěním umístit přesně pod uchycení pružiny. Z toho plyne, že síla působící na pružinu byla pouze částí tíhy závaží danou průmětem vektoru tíhové síly do osy pružiny. A protože při výpočtu jsem předpokládal, že síla, kterou působí pružina je rovna ky, ale ve skutečnosti je to jen její část, musí být skutečná tuhost větší, než jakou jsem vypočítal. To odpovídá výsledkům výše.

Dalším úkolem bylo určení tíhového zrychlení na základě srovnání výsledků měření statickou a dynamickou metodou. Ale vzhledem k chybě popsané v předchozích odstavcích mohu tímto způsobem určit g maximálně na jednu platnou číslici (protože v této přesnosti se mi shodují i výsledky obou metod).