Martin Beránek, 1.F, X–11

# XVII. Studium otáčení tuhého tělesa

PRACOVNÍ ÚKOL:

1. Změřte momenty setrvačnosti kvádru vzhledem k hlavním osám setrvačnosti.
2. Určete složky jednotkového vektoru ve směru tělesové úhlopříčky kvádru v souřadné soustavě dané hlavními osami setrvačnosti.
3. Vypočítejte moment setrvačnosti kvádru vzhledem k jeho tělesové úhlopříčce. Výsledek ověřte měřením.
4. Měřením ověřte Steinerovu větu.

TEORIE: Momenty setrvačnosti měřím metodou torzních kmitů, takže potřebuji znát direkční moment vlákna. Ten zjistím změřením periody kmitů tělesa o známém momentu setrvačnosti. Tímto tělesem je válec o známé hmotnosti a rozměrech, který jsem nechal otáčet kolem jeho geometrické osy. Moment setrvačnosti je v tomto případě

$$J_{\mathrm{v}} = \frac{1}{2} m r^2 \,, \tag{1}$$

kde $r$ je poloměr válce a $m$ jeho hmotnost.

Protože moment setrvačnosti tělesa je přímo úměrný druhé mocnině periody jeho kmitů na vlákně (viz. [1], str. 111), určím moment setrvačnosti dalších zkoumaných těles jako

$$J = T^2 \frac{J_{\mathrm{v}}}{T_{\mathrm{v}}^2} \,, \tag{2}$$

kde $J_{\mathrm{v}}$ je moment setrvačnosti podle (1), $T_{\mathrm{v}}$ je změřená perioda kmitů referenčního válce a $T$ perioda kmitů zkoumaného tělesa. $J$ je pak jeho moment setrvačnosti vůči ose dané vláknem, na kterém visí.

Pokud má těleso osy symetrie, tak jsou také jeho hlavními osami setrvačnosti. U kvádru jsou to tedy osy rovnoběžné s hranami procházející těžištěm. Kvádr byl uzpůsoben k měření momentu setrvačnosti vzhledem k těmto osám a navíc k ose mající směr úhlopříčky jedné stěny. Zvolím si souřadnou soustavu s počátkem v těžišti kvádru a osy označím postupně $x$, $y$ a $z$ tak, aby $x$ byla rovnoběžná s nejdelší hranou o délce $a$ a $z$ s nejkratší hranou o délce $c$. Délka třetí hrany je $b$. Osa, vůči které budu počítat moment setrvačnosti leží v rovině $xy$, takže $z$-ová složka jejího směrového vektoru je nulová. Protože je rovnoběžná s úhlopříčkou stěny, budou zbývající dvě složky jejího směrového vektoru v poměru $a : b$. Tedy

$$\nu_x^2 + \nu_y^2 = 1 \qquad \text{a} \qquad \frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{a}{b} \,.$$

Z toho získám jednoduchými úpravami

$$\nu_x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{3}$$

$$\nu_y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{4}$$

$$\nu_z = 0 \tag{5}$$

Moment setrvačnosti vůči libovolné ose dané jednotkovým vektorem $\nu$ se vypočte (viz [1], str. 112)

$$J_\nu = \nu_x^2 J_x + \nu_y^2 J_y + \nu_z^2 J_z \,. \tag{6}$$

Pro případ který zkoumám dosadím do (6) vztahy (3), (4) a (5)

$$J_\nu = \frac{a^2 J_x + b^2 J_y}{a^2 + b^2} \,. \tag{7}$$

Ověření **Steinerovy věty** jsem provedl pomocí fyzikálního kyvadla. Pro dobu jeho kmitu platí (opět viz. [1])

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} \,, \tag{8}$$

kde $J$ je moment setrvačnosti kyvadla vůči ose, kolem které se kývá, $m$ jeho hmotnost, $g$ tíhové zrychlení a $d$ vzdálenost osy otáčení od těžiště. Z (8) si vyjádřím moment setrvačnosti

$$J = \frac{mgdT^2}{4\pi^2}\,. \tag{9}$$

Podle Steinerovy věty by měl být svázán s momentem setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm tímto vztahem

$$J = J_0 + md^2\,. \tag{10}$$

Hodnotu $J$ a $J_0$ zjistím měřením a následně mohu ověřit, jestli je splněn vztah (10).

MĚŘENÍ: Nejprve jsem na vlákno zavěsil referenční válec a změřil dobu, za kterou vykoná pět kmitů

| měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{t_5}$ [s] | 60,11 | 60,16 | 60,20 | 60,13 | 60,25 |
| $\mathbf{\Delta t_5}$ [s] | −0,06 | −0,01 | 0,03 | −0,04 | 0,08 |
| $\mathbf{T}$ [s] | 12,02 | 12,03 | 12,04 | 12,03 | 12,05 |

Průměrná hodnota je $t_5 = 60{,}17\,\mathrm{s}$. Chybu měření způsobenou hlavně reakční dobou odhaduji na $\pm 0{,}2\,\mathrm{s}$. Odhad disperze souboru dat je $\tilde{\sigma} = 0{,}056\,\mathrm{s}$. Žádná hodnota není hrubou chybou. Celková odchylka pro čas pěti kmitů vychází $\sigma = 0{,}087\,\mathrm{s}$. Relativní chyba je tedy $\eta_t = 0{,}0014$ a výsledný čas jednoho kmitu

$$T_\mathrm{v} = (12{,}03 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}\,.$$

Průměr válce je $d = (108{,}10 \pm 0{,}025)\,\mathrm{mm}$ a jeho hmotnost $m = (903{,}8 \pm 0{,}05)\,\mathrm{g}$. Z toho podle vztahu (1) určím moment setrvačnosti

$$J_\mathrm{v} = (1{,}3202 \pm 0{,}0004)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,.$$

Hledaný poměr $J_\mathrm{v}/T_\mathrm{v}^2$ použitý ve vztahu (2) je tedy

$$\frac{J_\mathrm{v}}{T_\mathrm{v}^2} = (9{,}12 \pm 0{,}02)\cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}\,.$$

Dále jsem určoval periodu kmitu kvádru kolem každé z hlavních os setrvačnosti. Pro každou osu jsem měřil tolik kmitů, aby byl výsledný čas kolem jedné minuty (zvoleno jako kompromis mezi přesností a dobou trvání měření). Vždy jsem měřil pět časů.

| měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{10T_x}$ [s] | 62,84 | 63,00 | 63,14 | 62,97 | 63,00 |
| $\mathbf{\Delta(10T_x)}$ [s] | −0,15 | 0,01 | 0,15 | −0,02 | 0,01 |
| $\mathbf{5T_y}$ [s] | 57,93 | 57,76 | 57,71 | 57,86 | 57,70 |
| $\mathbf{\Delta(5T_y)}$ [s] | 0,14 | −0,03 | −0,08 | 0,07 | −0,09 |
| $\mathbf{5T_z}$ [s] | 64,39 | 64,56 | 64,53 | 64,49 | 64,49 |
| $\mathbf{\Delta(5T_z)}$ [s] | −0,10 | 0,07 | 0,04 | −0,00 | −0,00 |

Odhady disperze pro jednotlivé osy jsou $\tilde{\sigma}_x = 0{,}107\,\mathrm{s}$, $\tilde{\sigma}_y = 0{,}100\,\mathrm{s}$ a $\tilde{\sigma}_z = 0{,}064\,\mathrm{s}$. Tedy žádná ze změřených hodnot není hrubá chyba. Chybu měření opět odhadnu na $\pm 0{,}2\,\mathrm{s}$ a výsledné hodnoty časů jsou potom

$$T_x = (6{,}30 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}\,,$$
$$T_y = (11{,}56 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}\,,$$
$$T_z = (12{,}90 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}\,.$$

Podle vztahu (2) teď mohu určit momenty setrvačnosti podle jednotlivých os (čtverec celková relativní chyby je součet čtverců relativních chyb obou činitelů)

$$J_x = (0{,}362 \pm 0{,}001)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,,$$
$$J_y = (1{,}218 \pm 0{,}004)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,,$$
$$J_z = (1{,}517 \pm 0{,}005)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,.$$

Abych mohl určit moment setrvačnosti vzhledem k úhlopříčce, potřebuji změřit délky $a$ a $b$. Zjistil jsem tyto hodnoty

$$a = (127{,}85 \pm 0{,}025) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} \qquad \text{a} \qquad \mathrm{b} = (64{,}05 \pm 0{,}025) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}\,.$$

Podle vzorce (7) teď spočítám hodnotu $J_\nu$. Výslednou chybu opět určím metodou sčítání čtverců dílčích chyb. Vyjde

$$J_\nu = (0{,}534 \pm 0{,}001) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,.$$

Tuto hodnotu momentu setrvačnosti jsem také určoval experimentálně. Měřil jsem dobu, za kterou kvádr vykonal osm kmitů.

| měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{8T}_\nu$ [s] | 61,61 | 62,02 | 61,50 | 61,87 | 61,80 |
| $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{8T}_\nu)$ [s] | −0,15 | 0,26 | −0,26 | 0,11 | 0,04 |

Průměrná hodnota je 61,76 s a odhad disperze 0,207 s. Opět nedošlo k žádné hrubé chybě. Výsledná hodnota změřeného času

$$T_\nu = (7{,}72 \pm 0{,}03)\,\mathrm{s}$$

a podle (7) tomu odpovídající hodnota momentu setrvačnosti

$$J_\nu = (0{,}544 \pm 0{,}003) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,.$$

Při měření fyzikálního kyvadla jsem nejprve určil jeho moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm metodou torzních kmitů. Měřil jsem dobu, za kterou vykonalo 4 kmity

| měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{4T}$ [s] | 69,62 | 69,65 | 69,65 | 69,59 | 69,69 |
| $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{4T})$ [s] | −0,02 | 0,01 | 0,01 | −0,05 | 0,05 |

Tyto data zpracuji stejným způsobem jako v předchozích případech a získám

$$T = (17{,}41 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}$$

a z toho

$$J_0 = (2{,}764 \pm 0{,}007) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,.$$

Hmotnost celého kyvadla jsem změřil jako $m = (285{,}6 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$. Při kývání se otáčí kolem osy vzdálené $d = (0{,}156 \pm 0{,}001)\,\mathrm{m}$ od těžiště. Chybu $\pm 1\,\mathrm{mm}$ v tomto případě odhaduji hlavně z toho, že se mi pravděpodobně nepodařilo příliš přesně určit polohu těžiště. Hodnotu gravitačního zrychlení beru podle [2], str. 182 jako $g = (9{,}810769 \pm 0{,}000001)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Určoval jsme dobu 20-ti kmitů kyvadla

| měření | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{20T}_\mathrm{k}$ [s] | 18,83 | 18,86 | 18,86 | 18,82 | 18,78 | 18,79 |
| $\boldsymbol{\Delta}(\mathbf{20T}_\mathrm{k})$ [s] | 0,01 | 0,04 | 0,04 | −0,00 | −0,04 | −0,03 |

Pro dobu jednoho kmitu vychází

$$T_\mathrm{k} = (0{,}941 \pm 0{,}004)\,\mathrm{s}$$

a podle vzorce (9) určím moment setrvačnosti vůči této posunuté ose. Při započítání chyb uvedených výše a chyby $T_\mathrm{k}$ vyjde

$$J = (9{,}81 \pm 0{,}08) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,.$$

Samotný součin $md^2$ má ze změřených údajů hodnotu $(6{,}95 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$, takže podle vztahu (10) mohu spočítat moment $J$ alternativně s použitím hodnoty $J_0$. Vyjde

$$J = (9{,}71 \pm 0{,}06) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}\,.$$

DISKUZE: Moment setrvačnosti kvádru vůči úhlopříčce $J_\nu$ získaný měřením neodpovídá zcela teoreticky odvozené hodnotě vycházející ze zjištěných momentů setrvačnosti vůči hlavním osám. Rozdíl sice není příliš velký, ale už se nedá zahrnout pod chybu měření. Podle mého názoru je nejpravěpodobnější příčinou to, že osy předloženého tělesa, podle kterých jsem měřil momenty setrvačnosti nebyly zcela totožné s hlavními osami setrvačnosti. Fakt, že do kvádru byly vyvrtány otvory vždy pouze na jedné ze dvojice hran mohl způsobit jisté nepřesnosti. Otvory byly sice vyplněny šrouby, ale je pravděpodobné, že neměly stejnou hustotu jako zbytek tělesa. Také samotné těleso zřejmě není dokonale pravidelné.

Moment setrvačnosti šroubu, kterým bylo připevněno vlákno by se sice mohl projevit na konkrétních hodnotách, ale ve vztahu (6) znamená pouze to, že se na obě strany rovnice přičte nějaká stejná nenulová hodnota. To ale výslednou rovnost nijak neovlivní.

Bohužel nejsem schopný nijak ověřit nakolik mohla mít vliv jistá nesymetrie zkoumaného tělesa a ani nedokážu tyto chyby započítat jako nějakou opravu vztahů z teorie.

Naopak Steinerovu větu se mi v rámci přesnosti měření podařilo potvrdit. Hodnoty $J$ pro kyvadlo získané každou ze dvou metod se sice navzájem mírně liší, ale rozdíl je v rámci chyby měření.

ZÁVĚR:

1. Momenty setrvačnosti vzhledem k hlavním osám se mi podařilo změřit s poměrně vysokou přesností, ale nemám jak je jinak (teoreticky) ověřit, protože zkoumané těleso se nedá nějak jednoduše popsat (uříznutí hran není zcela pravidelné).
2. Moment setrvačnosti vůči úhlopříčce získaný výpočtem z předchozích údajů a přímo změřený se od sebe liší trochu víc, než je chyba měření. Nejpravděpodobnější důvod je to, že těleso není dokonale symetrické. Ovšem nejsem schopný do použitých rovnic započítat nějakou vhodnou korekci.
3. Steinerovu větu jsem v rámci přesnosti měření ověřil.

LITERATURA:

[1] D. Slavínská, I. Stulíková, P. Vostrý: Fyzikální praktikum I. SPN, Praha 1989
[2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky SNTL, Praha 1980