Martin Beránek, 1.F, X–11

XIII. Měření momentu setrvačnosti kola

PRACOVNÍ ÚKOL:

1. Změřte moment setrvačnosti kola metodou kyvů.
2. Změřte moment setrvačnosti kola metodou otáčení pro různé hodnoty parametru α. Graficky znázorněte závislost závislost $\omega = \omega(t)$ pro tři odlišné hodnoty parametru α.
3. Určete moment třecích sil M_t a moment setrvačnosti kola J_k korigovaný na nulovou hodnotu tření.
4. Graficky znázorněte závislost nekorigovaného momentu $J^\star$ na parametru α.

TEORIE: Když na kolo připevním mimo osu otáčení závaží, vznikne fyzikální kyvadlo. Malé kulové závaží o hmotnosti m je upevněno tak, že jeho těžiště leží ve vzdálenosti r od osy otáčení. Moment setrvačnosti kola i se závažím je J_c. Dále budu předpokládat, že výchylky z rovnovážné polohy budou menší než 5°, takže aproximace $\sin\alpha = \alpha$ způsobí chybu maximálně 1%.

Na vychýlené kolo působí moment sil

$$M = -mgr\alpha\,. \tag{1}$$

Pohybová rovnice je pak

$$-mgr\alpha = J_\mathrm{c}\varepsilon \tag{2}$$

a úpravami získám

$$\begin{aligned} mgr &= J_\mathrm{c}\,\frac{4\pi^2}{T^2}\,,\\ J &= mr\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - r\right)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

kde J je moment setrvačnosti samotného kola.

Při měření **metodou otáčení** je kolo roztáčeno závažím o hmotnosti m pověšeným na niti, která se odvíjí z válce o poloměru r upevněném v ose kola. Kolo se otáčí s úhlovým zrychlením ε. Bez započítání tření získám z pohybových rovnic následující vztah pro nekorigovaný moment setrvačnosti kola, který označím $J^\star$ (viz [1], str. 89)

$$J^\star = mr\left(\frac{g}{\varepsilon} - r\right)\,. \tag{4}$$

Vliv tření budu aproximovat konstantním momentem třecích sil M_t. Pokud tento moment dosadím do pohybových rovnic proti tahové síle vlákna, získám vztah pro korigovaný moment setrvačnosti kola J_k (viz [1], str. 89)

$$J_\mathrm{k} = mr\left(\frac{g}{\varepsilon} - r\right) - \frac{M_\mathrm{t}}{\varepsilon} = J^\star - \frac{M_\mathrm{t}}{\varepsilon}\,. \tag{5}$$

Tento vztah mohu také přepsat do tvaru

$$J^\star = J_\mathrm{k} + M_\mathrm{t}\,\frac{1}{\varepsilon} \tag{6}$$

a za použití spočítaných hodnot $J^\star$ a odpovídajících ε určím lineární regresí koeficienty J_k a M_t.

Při měření se ještě mění délka rozmotané nitě a tím pádem i hmotnost závaží, které roztáčí kolo, ale tento vliv je celkem malý, takže jej zahrnu jen do chyby určení hmotnosti m.

MĚŘENÍ: Při měření pomocí **kyvů** je potřeba určit hmotnost závaží a vzdálenost jeho těžiště od osy otáčení. Hmotnost

$$m = (148{,}961 \pm 0{,}0005)\,\mathrm{g}$$

je určena dostatečně přesně. Vzdálenost těžiště od osy kola jsem měřil pomocí tří vzdáleností – průměru největšího válce na ose kola $2l_1$, vzdálenosti stěny tohoto válce od ráfku, na kterém je připevněno závaží

l_2 a vzdálenosti těžiště od kraje závaží l_3 (těžiště jsem předpokládal ve středu závaží). Celková vzdálenost je

$$r = l_1 + l_2 - l_3 \,. \tag{7}$$

Naměřil jsem následující hodnoty: $l_1 = (94{,}23 \pm 0{,}05)\,\mathrm{mm}$, $l_2 = (153 \pm 3)\,\mathrm{mm}$ a $l_3 = (12{,}0 \pm 0{,}2)\,\mathrm{mm}$. Celková chyba je tedy dána chybou l_2 a podle (7) vychází

$$r = (235 \pm 3)\,\mathrm{mm}\,.$$

Měřil jsem dobu za kterou kolo vykoná 5 kmitů. Získané časy jsou v tabulce 1.

měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbf{T_5}$ [s]	12,15	12,12	11,93	12,21	12,10	12,12	12,00	11,99	12,07	12,04
$\mathbf{\Delta T_5}$ [s]	0,08	0,05	−0,14	0,14	0,03	0,05	−0,07	−0,08	0,00	−0,03

Tabulka 1

Průměrná hodnota $\tilde{T}_5 = 12{,}07\,\mathrm{s}$ a odhad disperze je $\left(\tilde{\sigma}^2\right)^\star = 0{,}007068\,\mathrm{s}^2$. Všechny hodnoty jsou v rozsahu 3σ. Chybu měření danou reakční dobou odhaduji na $\pm 0{,}2\,\mathrm{s}$, takže celková chyba $\sigma_{\mathrm{celk}} = 0{,}217\,\mathrm{s}$.

Perioda je pětinou změřené doby, takže

$$T = (2{,}41 \pm 0{,}04)\,\mathrm{s}\,.$$

Podle vztahu (3) spočtu moment setrvačnosti $J = 0{,}042133\,\mathrm{kg\,m^2}$. Hodnotu tíhového zrychlení beru podle [2], str. 182. Chyba je dána chybou určení periody T a vzdálenosti r. Potom k ní ještě připočtu jedno procento způsobené aproximací $\sin\alpha = \alpha$. Výsledná hodnota momentu setrvačnosti kola tedy je

$$\underline{\underline{J = (0{,}042 \pm 0{,}003)\,\mathrm{kg\,m^2}}}\,.$$

Pro měření **metodou otáčení** jsem měl k dispozici pět různých závaží a čtyři různé poloměry válců připevněných na kole. Závaží je možné zvážit dostatečně přesně, takže celková chyba hmotnosti bude odpovídat hmotnosti nitě, tedy 0,144 g. Zjištěné hodnoty jsou

$$m_1 = (50{,}00 \pm 0{,}14)\,\mathrm{g} \qquad m_4 = (15{,}12 \pm 0{,}14)\,\mathrm{g}$$
$$m_2 = (30{,}09 \pm 0{,}14)\,\mathrm{g} \qquad m_5 = (10{,}13 \pm 0{,}14)\,\mathrm{g}$$
$$m_3 = (20{,}07 \pm 0{,}14)\,\mathrm{g}$$

Poloměry válců

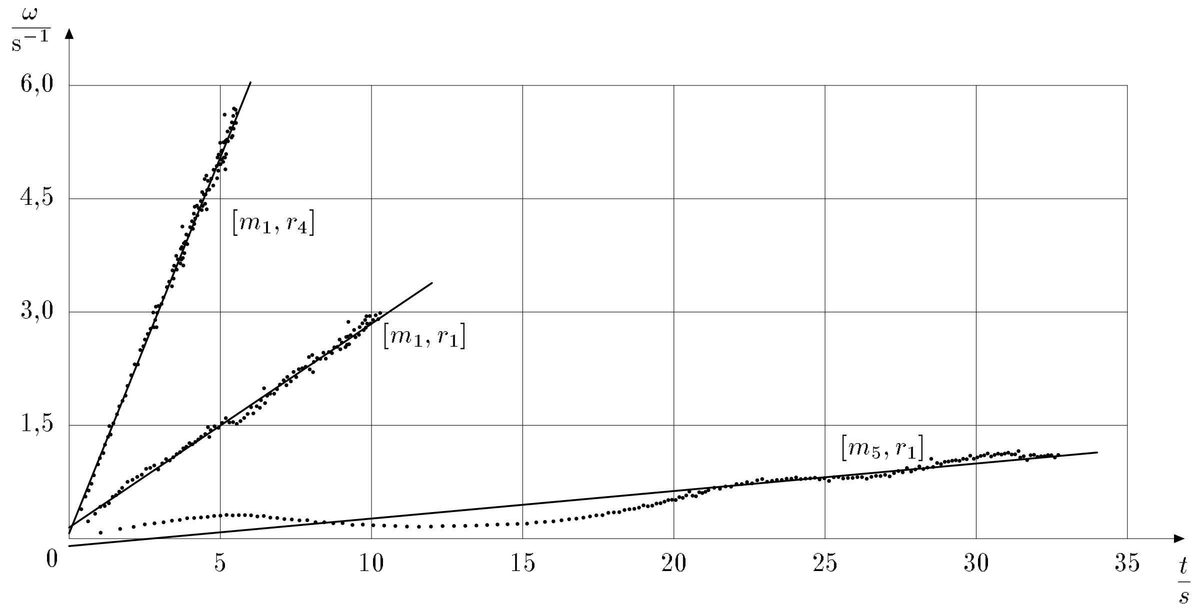
$$r_1 = (29{,}83 \pm 0{,}03)\,\mathrm{mm} \qquad r_3 = (69{,}50 \pm 0{,}08)\,\mathrm{mm}$$
$$r_2 = (49{,}80 \pm 0{,}03)\,\mathrm{mm} \qquad r_4 = (89{,}63 \pm 0{,}08)\,\mathrm{mm}$$

Větší chyba u druhých dvou údajů je způsobena tím, že posuvné měřítko nemělo dostatečně dlouhá ramena na přímé změření průměru válce, takže jsem měřil průměr válce i s hranou a její výšku jsem pak odečetl.

Hodnoty úhlové rychlosti jsem měřil elektronickým snímačem a rovnou byla provedena i lineární regrese, takže jako výsledek jsem získal úhlové zrychlení. Naměřené hodnoty ε jsou uvedeny v tabulce 2.

	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$	$\mathbf{r_3}$	$\mathbf{r_4}$
$\mathbf{m_1}$	$0{,}2704 \pm 0{,}0015$	$0{,}5435 \pm 0{,}0022$	$0{,}7727 \pm 0{,}0032$	$0{,}9956 \pm 0{,}0040$
$\mathbf{m_2}$	$0{,}1777 \pm 0{,}0010$	$0{,}3211 \pm 0{,}0013$	$0{,}4604 \pm 0{,}0019$	$0{,}5950 \pm 0{,}0025$
$\mathbf{m_3}$	$0{,}1149 \pm 0{,}0007$	$0{,}2063 \pm 0{,}0009$	$0{,}3000 \pm 0{,}0013$	$0{,}3915 \pm 0{,}0018$
$\mathbf{m_4}$	$0{,}0793 \pm 0{,}0006$	$0{,}1494 \pm 0{,}0008$	$0{,}2151 \pm 0{,}0010$	$0{,}2897 \pm 0{,}0013$
$\mathbf{m_5}$	$0{,}0363 \pm 0{,}0008$	$0{,}0913 \pm 0{,}0008$	$0{,}1384 \pm 0{,}0008$	$0{,}1867 \pm 0{,}0010$

Tabulka 2 (hodnoty $\varepsilon\,[\mathrm{s^{-2}}]$ pro různá m a r)



Graf 1

Průběh úhlové rychlosti otáčení kola v závislosti na čase je pro tři vybrané případy znázorněn v grafu 1.

Podle vztahu (4) spočítám pro každou kombinaci závaží a poloměru nekorigovaný moment setrvačnosti kola $J^\star$. Výsledky jsou v tabulce 3 a relativní chyba této hodnoty v tabulce 4.

	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$	$\mathbf{r_3}$	$\mathbf{r_4}$
$\mathbf{m_1}$	54,08	44,83	43,88	43,76
$\mathbf{m_2}$	49,48	45,72	44,42	44,23
$\mathbf{m_3}$	51,11	47,48	45,52	44,92
$\mathbf{m_4}$	55,81	49,40	47,85	45,77
$\mathbf{m_5}$	81,62	54,20	49,87	47,64

Tabulka 3 (hodnoty $J^\star$ [g m^2])

	$\mathbf{r_1}$	$\mathbf{r_2}$	$\mathbf{r_3}$	$\mathbf{r_4}$
$\mathbf{m_1}$	0,009	0,007	0,008	0,007
$\mathbf{m_2}$	0,011	0,009	0,010	0,010
$\mathbf{m_3}$	0,014	0,012	0,012	0,012
$\mathbf{m_4}$	0,018	0,015	0,015	0,015
$\mathbf{m_5}$	0,037	0,023	0,021	0,020

Tabulka 4 (rel. chyby $J^\star$)

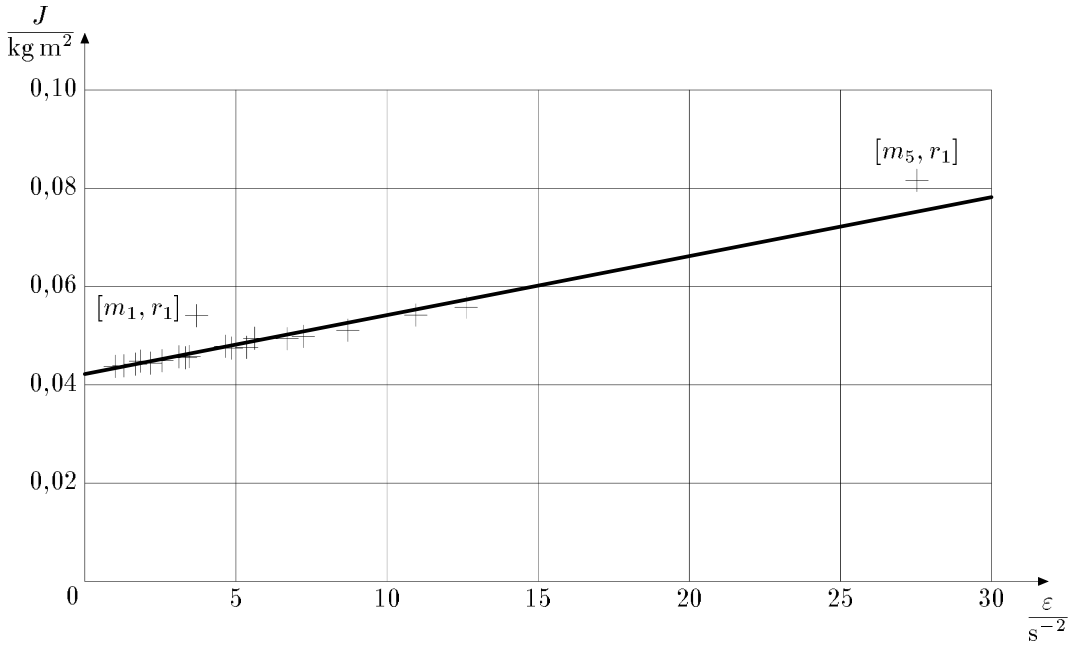
Je vidět, že chyby se dost liší a největší jsou pro lehká závaží na válci s malým poloměrem. Nyní mohu spočítat koeficienty ve vztahu (6). Abych nějak zohlednil různé hodnoty chyby, použil jsme program, který počítá lineární regresi s váženými koeficienty, tedy minimalizuje sumu čtverců odchylek vynásobených příslušnou vahou. Jako váhy jsem zadal převrácené hodnoty relativní chyby ε, která se mění v závislosti na m a r přibližně stejně, jako chyba $J^\star$. Vyšly následující hodnoty

$$\underline{\underline{J_\mathrm{k} = (0{,}0422 \pm 0{,}0007)\,\mathrm{kg\,m^2}}} \qquad \text{a} \qquad \underline{\underline{M_\mathrm{t} = (0{,}0012 \pm 0{,}0001)\,\mathrm{N\,m}}}\,.$$

V grafu 1 jsou vyneseny hodnoty nekorigovaného momentu setrvačnosti pro všechny kombinace poloměrů a závaží a je jimi proložena přímka spočítaná lineární regresí. Její průsečík se svislou osou je moment setrvačnosti kola s korekcí pro třecí síly a její směrnice udává moment třecích sil.

DISKUZE: Při měření pomocí kyvů jsem nijak nezapočítával tlumení, nicméně z jednoduchého pozorování, že amplituda kyvů klesne na polovinu za čas v řádu desítek sekund a ze vzorce pro frekvenci tlumených kmitů $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$, kde β je koeficient útlumu, vychází, že chyba způsobená zanedbáním odporových sil je o několik řádů nižší, než chyba měření času. Celková chyba výsledku je poměrně veliká, kvůli nepřesnému určení času a vzdálenosti závaží od osy.

Při měření pomocí otáčení bylo určení aktuální úhlové rychlosti dostatečně přesné. Větší problém působí to, že moment odporových sil M_t není konstantní a závisí na úhlu otočení kola. To se projeví hlavně při malých rychlostech jako oscilace úhlové rychlosti (viz graf 1) a tím menší přesnost určení zrychlení. V tomto směru jsou nejvýhodnější těžší závaží na velkých válcích, protože se nekonstantní



Graf 2

odporové síly tolik neprojeví. Na druhou stranu je v tomto případě hodnota $1/\varepsilon$ hodně malá a není tedy nejvhodnější pro použití k lineární regresi podle vztahu (6).

Různou přesnost hodnot úhlového zrychlení jsem se snažil započítat pomocí vah u lineární regrese – tedy odchylka u hodnoty, která byla určena s malou přesností má menší význam.

Z grafu 2 je vidět, že při měření nejlehčího závaží na nejmenším válci došlo skutečně ke značné odchylce. Odchylka u nejtěžšího závaží na nejmenším válci je pravděpodobně způsobena náhodnou chybou při měření a ostatní hodnoty už velmi dobře odpovídají.

ZÁVĚR: Moment setrvačnosti kola určený dvěma nezávislými metodami se velmi dobře shoduje. Metoda kyvů je zatížena celkem velkou chybou měření. U metody měření pomocí otáčení jsou chyby výrazně nižší díky použití elektronického měření časů a zpracování velkého množství údajů pomocí lineární regrese. V tomto případě se více projevovaly systematické chyby dané neideálními podmínkami experimentu.

LITERATURA:

[1] D. Slavínská, I. Stulíková, P. Vostrý: Fyzikální praktikum I. SPN, Praha 1989

[2] J. Brož, V. Roskovec, M. Valouch: Fyzikální a matematické tabulky SNTL, Praha 1980