UKM T4.1

- Měření
- Vlnové částice

jáma vs. energie

$\left[x \frac{d}{dx}\right]^n$ pomocí komutátorů

$\hat{H}$ $|b\rangle$ $\quad$ $\hat{A} \leftarrow$ "cokoliv"

$\varepsilon_2 \leftrightarrow |A_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle + |b\rangle\right)$, vl. číslo a_1 $\qquad$ $\hat{B}$

$\varepsilon_1 \quad |A_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle - |b\rangle\right)$, vl. číslo a_2 $\qquad$ $|B_1\rangle = |a\rangle$, vl. číslo b_1

$|a\rangle$ $\qquad$ $|B_2\rangle = |b\rangle$, vl. číslo b_2

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1,2} c_n e^{-i\varepsilon_n t/\hbar} \psi_n(x)$$

- energie stavů $|A_1\rangle$ a $|A_2\rangle$?

$$\langle A_1|\hat{H}|A_1\rangle = \frac{1}{2}\left(\left(\langle a| + \langle b|\right)\hat{H}\left(|a\rangle + |b\rangle\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\langle a|\hat{H}|a\rangle + \langle a|\hat{H}|b\rangle + \right.$$

$$\left. + \langle b|H|a\rangle + \langle b|H|b\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_a + 0 + 0 + \varepsilon_b\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_a + \varepsilon_b\right) \quad \text{OK}$$

- maticová reprezentace v bázi $|a\rangle, |b\rangle$
  - $\hat{A}$ je diagonální pro vlastní vektory $|A_1\rangle, |A_2\rangle$

$$\to \quad \hat{A} = |A_1\rangle a_1 \langle A_1| + |A_2\rangle a_2 \langle A_2| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(|a\rangle + |b\rangle\right) a_1 \left(\langle a| + \langle b|\right) + \frac{1}{2}\left(|a\rangle - |b\rangle\right) a_2 \left(\langle a| - \langle b|\right)$$

$$\langle a|\hat{A}|a\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle a|\left(|a\rangle + |b\rangle\right)}_{=1} a_1 \underbrace{\left(\langle a| + \langle b|\right)|a\rangle}_{=1} + \frac{1}{2}\langle a|\left(|a\rangle - |b\rangle\right) a_2 \left(\langle a| - \langle b|\right)|a\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2$$

$$\langle a|\hat{A}|b\rangle = \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2$$

$$\langle b|\hat{A}|a\rangle = \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} a_2$$

$$\langle b|\hat{A}|b\rangle = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2$$

$$\hat{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & a_1 - a_2 \\ a_1 - a_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

symetrická / Hermitovské

vl. čísla $\quad$ 1: $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = a_1$

2: $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) - \frac{1}{2}(a_1 - a_2) = a_2$

OK, v pořádku

vl. vektor

$\frac{1}{2}(|a\rangle + |b\rangle)$

$\frac{1}{2}(|a\rangle - |b\rangle)$

$$\text{cf.} \quad H = \begin{pmatrix} \varepsilon_a & 0 \\ 0 & \varepsilon_b \end{pmatrix}$$

$$\langle A_1|\hat{A}|A_1\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle a| + \langle b|\right)\hat{A}\left(|a\rangle + |b\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle a| + \langle b|\right)\left(|a\rangle + |b\rangle\right) a_1 \left(\langle a| + \langle b|\right)\left(|a\rangle + |b\rangle\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\langle a| + \langle b|\right)\left(|a\rangle - |b\rangle\right) a_2 \left(\langle a| - \langle b|\right)\left(|a\rangle + |b\rangle\right) =$$

$$1 \quad 0 \quad -1 \Rightarrow 0$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot a_1 \cdot 2 = a_1 \quad \text{OK}$$

$$\psi(x,t) = c_a |a\rangle e^{-i\varepsilon_a t/\hbar} + c_b |b\rangle e^{-i\varepsilon_b t/\hbar}$$

$|a\rangle$: $c_a = 1 \Rightarrow c_b = 0$

$\psi(x,t) = |a\rangle e^{-i\varepsilon_a t/\hbar}$ žádné překvapení

$|A_1\rangle$: $c_a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ← v čase $t=0^*$ naměříme vl. hodnotu $\langle\hat{A}\rangle = a_1$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle e^{-i\varepsilon_a t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle e^{-i\varepsilon_b t/\hbar}$$

měření $\hat{A}$ v čase $t = 0+$

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle$$

$\langle A_1|\psi\rangle = 1$ $\quad |\langle A_1|\psi\rangle|^2 = 1$ ← pravděpodobnost

$\langle A_2|\psi\rangle = 0$ → naměříme a_1 $\quad a_1|\langle A_1|\psi\rangle|^2 = a_1$ ← naměřená hodnota

měření $\hat{A}$ v čase $t > 0$ $\quad \boxed{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}$

$$\langle A_1|\psi\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\langle a| + \langle b|\right)\left(|a\rangle e^{-i\varepsilon_a t/\hbar} + |b\rangle e^{-i\varepsilon_b t/\hbar}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(e^{-i\varepsilon_a t/\hbar} + e^{-i\varepsilon_b t/\hbar}\right)$$

$$\langle A_2|\psi\rangle = \tfrac{1}{2}\left(\langle a| - \langle b|\right)\left(|a\rangle e^{-i\varepsilon_a t/\hbar} + |b\rangle e^{-i\varepsilon_b t/\hbar}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(e^{-i\varepsilon_a t/\hbar} - e^{-i\varepsilon_b t/\hbar}\right)$$

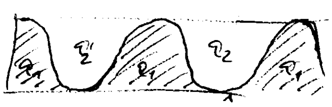
$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|A_1\rangle a_1 \langle A_1|\psi\rangle + \langle\psi|A_2\rangle a_2 \langle A_2|\psi\rangle = a_1|\langle A_1|\psi\rangle|^2 + a_2|\langle A_2|\psi\rangle|^2$$

$$= \frac{a_1}{4}\left[\left(e^{i\varepsilon_a t/\hbar} + e^{i\varepsilon_b t/\hbar}\right)\left(e^{-i\varepsilon_a t/\hbar} + e^{-i\varepsilon_b t/\hbar}\right)\right] + \frac{a_2}{4}\left[\left(e^{i\varepsilon_a t/\hbar} - e^{i\varepsilon_b t/\hbar}\right)\left(e^{-i\varepsilon_a t/\hbar} - e^{-i\varepsilon_b t/\hbar}\right)\right]$$

$$= \frac{a_1}{4}\left[2 + e^{-i(\varepsilon_a - \varepsilon_b)t/\hbar} + e^{i(\varepsilon_a - \varepsilon_b)t/\hbar}\right] + \frac{a_2}{4}\left[2 - e^{-i(\varepsilon_a - \varepsilon_b)t/\hbar} - e^{i(\varepsilon_a - \varepsilon_b)t/\hbar}\right]$$

$$= \frac{a_1}{4}\left[2 + 2\cos\left[(\varepsilon_a - \varepsilon_b)t/\hbar\right]\right] + \frac{a_2}{4}\left[2 - 2\cos\left[(\varepsilon_a - \varepsilon_b)t/\hbar\right]\right]$$

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} \qquad 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= a_1 \cos^2\left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)t}{2\hbar}\right] + a_2 \sin^2\left[\frac{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)t}{2\hbar}\right] \rightarrow$$  atd.

– v pozdějším čase je možné naměřit jinou vl. hodnotu $\hat{A}$, než ta, která byla změřena původně — pouze pokud $[\hat{A}, \hat{H}] \neq 0$!!
tj. pokud vl. stavy $\hat{A}$ a $\hat{H}$ se navzájem liší!!!

$c_a(t) = ?$ $\quad c_b(t) = ?$ $\quad c_a(\tau) = ?$ $\quad c_b(\tau) = ?$

- doměření z UKMT4.13 čas. vývoj a měření UKMT4.13

$c_a = \langle a | \psi \rangle$ $\psi' = \frac{1}{\sqrt{2}} |a\rangle e^{-i\varepsilon_a t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} |b\rangle e^{-i\varepsilon_b t/\hbar}$

$c_a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varepsilon_a t/\hbar}$

pravděp. $a = |\langle a|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left(e^{i\varepsilon_a t/\hbar} \cdot e^{-i\varepsilon_a t/\hbar} \right) = 1/2$

$|\langle b|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2} \left(e^{i\varepsilon_b t/\hbar} \cdot e^{-i\varepsilon_b t/\hbar} \right) = 1/2$

$c_a(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\varepsilon_a(-it)/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\varepsilon_a t/\hbar}$

$\tau = -it$ $\Delta E = \varepsilon_b - \varepsilon_a > 0$

$c_b(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\varepsilon_b t/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-(\varepsilon_a + \Delta E)t/\hbar}$

$$\frac{c_b(\tau)}{c_a(\tau)} = \frac{e^{-(\varepsilon_a + \Delta E)t/\hbar}}{e^{-\varepsilon_a t/\hbar}} = e^{-\Delta E t/\hbar} \to 0$$

- časový vývoj v imaginárním čase vede k ~~řešení~~ základnímu stavu (stavu s nejnižší energií) (pokud se v původním stavu vyskytoval)

[faktor $e^{-iE_a t/\hbar}$ - oscilace se nahradí faktorem $e^{-\varepsilon E_a t/\hbar}$ - zhasínání nebo narůst, v závislosti na E_a, $(E_a - E_{target})$ - E_{target} - zajistí stabilitu ψ, pokud souhlasí s E_a (energií zákl. stavu)]