Domácí úkol 28. 2. 2023

V tomto úkolu si procvičíme integrály, lineární algebru a výpočet maticových elementů a středních hodnot.

Mějme funkce

$$
\begin{aligned}
f_0(x) = &\quad \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\
f_1(x) = &\quad \sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \\
f_B(x) = &\quad N x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} .
\end{aligned}
$$

Definiční obor je $x \in (-\infty, \infty)$. Těmto funkcím obvykle říkáme gaussovské, gaussiány, gaussovky nebo obdobně. Funkce si nakreslete (pokud někdo předělává řešení do TeXu, tak není nutné mi obrázky posílat).

Část 1 – Normalizace

1.1 První dvě funkce máme normalizované, jejich normalizaci ověřte pomocí integrálu. Integrály jsou na konci zadání.

1.2 Vypočtěte normalizační konstantu N. Měla by vyjít rovna $\frac{2}{\sqrt{3\sqrt{\pi}}}$.

Část 2 – Ortogonalizace báze

2.1 Ověřte, že funkce f_0 a f_1 jsou na sebe kolmé.

2.2 Funkce f_0 a f_B na sebe kolmé nejsou. Ověřte, že jejich skalární součin je roven $\langle f_B | f_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Funkci f_B můžeme ortogonalizovat na funkci f_0 pomocí vzorce $f_\perp = f_B - \langle f_B | f_0 \rangle f_0$.

2.3 Vypočtěte $f_\perp(x)$.

Funkce $f_\perp$ není normalizovaná, musíme ji tedy normalizovat. Jednou z možností je explictní výpočet integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} f_\perp^*(x) f_\perp(x) dx$. Jednodušší možností je použít bra-ketů. Funkci $f_\perp(x)$ si napíšeme jako ket $|f_\perp(x)\rangle = |f_B(x)\rangle - \langle f_B | f_0 \rangle |f_0\rangle$. Dále vypočteme normu funkce $f_\perp$ pomocí skalárního součinu $\langle f_\perp | f_\perp \rangle$.

2.4 Vypočtěte normu funkce $f_\perp$ a funkci normalizujte.

Výslednou funkci označíme jako f_2 a měla by být rovna $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}}(2x^2 - 1)e^{-x^2/2}$.

Část 3 – Maticové elementy

Budou nás zajímat maticové elementy operátoru $\hat{x}$. Pro to je důležité vědět, že integrál gaussovky a liché funkce od $-\infty$ po ∞ je roven nule (sudá krát lichá).

3.1 Vypočtěte maticové elementy operátoru $\hat{x}$ pro funkce f_0, f_1 a f_2, tedy 9 hodnot pro matici 3×3. Nenulové by měly být jen čtyři hodnoty a matice by měla být symetrická.

Matici $\mathbf{X}$ napište.

3.2 Vypočtěte matici $\mathbf{X^2}$.

3.3 Vypočtěte střední hodnotu operátoru $\hat{x}^2$ pro funkci f_0, tedy $\langle f_0 | \hat{x}^2 | f_0 \rangle$ a ověřte shodu s odpovídajícím členem matice $\mathbf{X^2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{B}}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-Bx^2} dx = \frac{1}{2B}\sqrt{\frac{\pi}{B}}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-Bx^2} dx = \frac{3}{4B^2}\sqrt{\frac{\pi}{B}}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-Bx^2} dx = \frac{15}{8B^3}\sqrt{\frac{\pi}{B}}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^8 e^{-Bx^2} dx = \frac{105}{16B^4}\sqrt{\frac{\pi}{B}}$$