

Domácí úkol 25. 4. 2023

Vlastní stavy operátoru L_x

Uvažujme částici ve stavu s kvantovým číslem orbitálního momentu hybnosti rovným jedné, $l = 1$. Budeme uvažovat kvantování momentu podél osy z . Naším cílem bude odvodit vlastní funkce (jako funkce θ a ϕ) operátoru L_x .

1.1 Jaké jsou možné hodnoty průmětu momentu na osu z ? Jaká je velikost momentu hybnosti L^2 ?

Vlastní funkce operátoru L_z mají pro $l = 1$ ve sférických souřadnicích tvar

$$\begin{aligned} Y_1^1 &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi} \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \\ Y_1^{-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}, \end{aligned} \quad (1)$$

spodní index je vlastní číslo velikosti momentu hybnosti, horní je vlastní číslo projekce na osu z .

V bázi vlastních stavů L_z (předešlé funkce v uvedeném pořadí) je maticová reprezentace operátoru L_x dána maticí

$$\mathbf{L}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

1.2 Bez výpočtu: Jaká by měla mít matice \mathbf{L}_x vlastní čísla?

1.3 Bez výpočtu: Jsou funkce z Eq. 1 vlastními funkcemi operátoru L_x ? (Použijme maticovou reprezentaci.)

1.4 Vypočtete vlastní čísla matice \mathbf{L}_x a vlastní vektor odpovídající nejvyšší vlastní hodnotě.

Vlastní vektor matice \mathbf{L}_x máme nyní vyjádřený v bázi vlastních stavů L_z . Můžeme přejít opět do sférických souřadnic a použít explicitní vyjádření těchto stavů, tedy funkce (1).

1.5 Z vektoru vlastního stavu \mathbf{L}_x vypočtete vlastní funkci operátoru L_x ve sférických souřadnicích. Označme ji třeba ψ_{x1} .

Operátor L_x ve sférických souřadnicích je

$$L_x = i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \quad (3)$$

1.6 Ověřte, že ψ_{x1} je vlastní funkcí operátoru L_x a že vlastní číslo taky sedí.

1.7 Ověřte, že ψ_{x1} , tedy vlastní stav operátoru L_x **není** ortogonální na Y_1^1 , tedy vlastní stav operátoru L_z . Výpočet proveďte jednak ve sférických souřadnicích a také pomocí vektorového vyjádření obou stavů a ověřte shodu výsledků.