Cvičení 11. 4. 2023

Téma: Oscilátor

Kvantový oscilátor je systém s Hamiltoniánem

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \,.$$

∞ Gausovky

Řešení harmonického oscilátoru obsahují gausovské funkce, e^{-Ax^2}. Funkce jsou tyto:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \\
f_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}} \frac{x}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \\
f_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha\sqrt{\pi}}} \left(2\frac{x^2}{\alpha^2} - 1\right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}
\end{aligned}$$

Pro některé z dalších výpočtů je vhodné využít následujících vzorečků:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Bx^2} dx = \sqrt{\tfrac{\pi}{B}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-Bx^2} dx = \frac{1}{2B}\sqrt{\frac{\pi}{B}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-Bx^2} dx = \tfrac{3}{4B^2}\sqrt{\tfrac{\pi}{B}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-Bx^2} dx = \frac{15}{8B^3}\sqrt{\frac{\pi}{B}}$$

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \,.$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right) \qquad [a, a^\dagger] = 1 \,.$$

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger) \qquad p = \frac{i\hbar}{\alpha\sqrt{2}}(a^\dagger - a)$$

Příklad 1 Střední hodnoty

Zvyšovací a snižovací operátory nám umožňují vypočítat střední hodnoty operátorů x nebo derivace jednodušejí než pomocí integrace.

1.1 Vypočtěte střední hodnoty operátorů p a x^2 pokud je částice ve stavu $|n\rangle$.

1.2 Vypočtěte akci operátoru p^2 na stav $|n\rangle$. Tedy na stav $|n\rangle$ operátorem p^2 zapůsobte. Výsledek obložte zleva stavem $\langle n|$ a dopočtěte střední hodnotu. (Někdy je takovýto postup užitečný, je dobré jej znát.)

1.3 Uvažujte operátory x^2 a p^2 vyjádřená pomocí a a $a^\dagger$ v normálním pořadí, byly by jejich matice diagonální? Dosaďte do Hamiltoniánu. Bude diagonální Hamiltonián?

Příklad 2 Maticová reprezentace

Působení operátorů a a $a^\dagger$ je dobře vidět v maticové reprezentaci, kde se ukáže i pár jiných zajímavých věcí pro jiné operátory.

Pro připomenutí, maticovou reprezentaci operátoru $\hat{O}$ vytvoříme z čísel o_{mn} vypočtených takto $o_{mn} = \langle m|\hat{O}|n\rangle$. Čísla o_{mn} pak uspořádáme do matice $\mathbf{O}$.

2.1 Vypočtěte maticovou reprezentaci operátorů a a $a^\dagger$ obecně a část pro $n \leq 3$ napište explicitně jako matici. Jsou hermitovské?

S maticemi můžeme ověřit některé z předešlých výpočtů.

2.2 Ověřte komutační relaci $[a, a^\dagger] = 1$.

2.3 Vypočtěte matici operátorů x a p a jejích druhých mocnin.

2.4 Sestrojte matici Hamiltoniánu.

2.5 Jak bude vypadat matice x^3? Vypočtěte ji. Odpovídá výsledek vaší představě?

R2.6 Vyjádřete operátor x^3 pomocí a a $a^\dagger$ a uveďte do normálního pořadí.

Příklad 3 Časový vývoj

Uvažujme částici v potenciálu oscilátoru s minimem v $x = 0$.

3.1 Částice je ve stavu $|n\rangle$. Jaká je časová závislost střední hodnoty operátoru x?

Nyní uvažujme, že částice je ve stavu $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.

3.2 Jaká je časová závislost střední hodnoty operátoru x (R: stavy vyjádřete v x-reprezentaci)?

3.3 Jaká je energie stavu $|\psi\rangle$ a její časová závislost?

Příklad 4 Oscilátor v elektrickém poli

Uvažujme, že částice pohybující se v poli kvantového oscilátoru nese náboj a na oscilátor působí elektrické pole o konstantní intenzitě E. Výsledkem je dodatečný potenciál $-|e|\hat{x}E$.

4.1 Vypočtěte změnu energetických hladin po přidání potenciálu pomocí převedení potenciálu v Hamiltoniánu na úplný čtverec. Diskutujte roli různých parametrů ve výsledku.

4.2 Vypočtěte změnu energie základního stavu pomocí maticové reprezentace diagonalizací části nového Hamiltoniánu.

4.3 Vypočtěte změnu energie základního stavu pomocí optimalizace parametru x_0 vlnové funkce

$$f_0(x, x_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\alpha^2}} .$$

4.4 Vypočtěte změnu energie základního stavu pomocí optimalizace (reálného) parametru C vlnové funkce

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+C^2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}} \left(1 + \sqrt{2}C\frac{x}{\alpha}\right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} .$$