Cvičení 2. 5. 2023

Téma: Moment hybnosti

Moment hybnosti je $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, tedy složkově $L_i = \epsilon_{ijk} r_j p_k$. Pokud si vektorový součin rozepíšeme, dostaneme

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (yp_z - zp_y, zp_x - xp_z, xp_y - yp_x)\,,$$

kde jednotlivé části jsou složky vektoru momentu hybnosti.

Užitečné funkce:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$
$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$
$$Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}\,.$$

navíc $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{i\phi}$.

Příklad 1 Zvyšovací a snižovací operátory

Důležitými operátory pro moment hybnosti jsou zvyšovací a snižovací operátory, $L_\pm$, pro které platí

$$L_\pm|lm\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|lm \pm 1\rangle$$

.

1.1 Matice $L_\pm$ budou opět blokově diagonální ve skupinách se stejným l. Kolik bude v každém bloku nenulových členů?

1.2 Vytvořte matici L_+ pro $l = 0$, $l = 1$ a $l = 2$. Vytvořte matici L_- pro $l = 1$.

R1.3 Uvažujme stav s maximální možnou projekcí pro dané l. Jakou hodnotu bude mít koeficient $l(l+1) - m(m+1)$ při použití L_+ na tento stav? Obdobně, jakou hodnotu bude mít $l(l+1) - m(m-1)$ při použití L_- na stav s nejnižším možným m pro dané l?

1.4 Použijte $L_\pm = L_x \pm iL_y$ pro vytvoření matic L_x a L_y.

1.5 Ověřte, že matice $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ pro $l = 1$ je shodná s maticí L^2.

1.6 Pro složky momentu hybnosti platí $[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} i\hbar L_k$. Ověřte pro $L_i = L_x$, $L_j = L_y$ a $L_k = L_z$ pomocí maticové reprezentace pro $l = 1$.

Příklad 2 Spin

Uvažujme maticovou reprezentaci operátorů spinu 1/2, konkrétně s_x.

$$\mathbf{s_x} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

2.1 Vypočítejte vlastní čísla a stavy matice s_x.

2.2 Využijte vzorce $O = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ pro zpětný výpočet maticové reprezentace operátoru.

2.3 Jak bude vypadat matice s_x, pokud v předešlém vzorci použijeme bázi vlastních stavů s_x? (Hint: použijte stejný vzorec jako v **2.2**, ale s jinou bází.)

R2.4 Tvar matice z **2.3** ověřte pomocí rotace matice do s_x do jejích vlastních vektorů. Použijte vzorec $s_x^{\mathrm{rot}} = U^+ s_x U$, kde U jsou matice rotace obsahující vlastní vektory ve sloupcích.

Příklad 3 Maticové elementy x, y a z

Funkce Y_l^m jsou vlastní funkce L^2 a L_z. V této bázi jsou i operátory L_x, L_y, L_+ a L_- blokově diagonální, nenulový blok je vždy pro stejnou hodnotu l. Existují ale i operátory, které mají některé z mimodiagonálních bloků nenulové. Typicky se jedná o operátory obsahující $\cos\theta$ nebo $\sin\theta$, což jsou například operátory kartézských souřadnic neboť $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ a $z = \cos\theta$.

Uvažujme sférickou část operátoru x, tedy $\sin\theta\cos\phi$. Uvažujme dále maticový element mezi základním stavem a stavy s $l = 1$.

3.1 Chceme zjistit, pro jaké hodnoty m budou maticové elementy $\langle Y_0^0|x|Y_1^m\rangle$ nenulové. Přepište $\langle Y_0^0|x$ do sférických harmonik, identifikujte funkce $Y_1^m(\theta,\phi)$ a výsledek přepište jako součet $\langle Y_1^m|$.

3.2 Předešlý krok nyní ověříme explicitním výpočtem. Tedy pro sférickou část vypočtěte integrály $\langle Y_0^0|x|Y_1^m\rangle$ ve sférických souřadnicích.

Uvažujme nyní úhlovou část z.

3.3 Pro jakou hodnotu m bude maticový element $\langle Y_0^0|z|Y_1^m\rangle$ nenulový?

3.4 Budou mít x nebo z nenulové maticové elementy $\langle Y_0^0|z|Y_l^m\rangle$ se stavy s l vyšším než 1?

Pozn.: Maticové elementy souřadnic jsou důležité neboť jsou třeba při výpočtech interakce vodíku s elektromagnetickým zářením nebo poli obecně. Z takzvané dipólové aproximace vyplynou právě maticové elementy souřadnic v první mocnině pro elektrické pole. Nutné změny l a m jsou potom tzv. výběrová pravidla.

Pozn.: Clebsch-Gordanovy koeficienty.