DÚ 30. 3. 2022

Využíváme zvyšovací a snižovací operátory kvantového oscilátoru

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right) .$$

▷ Vyjádřete operátor x^2 pomocí a a $a^\dagger$. Výsledek převeďte do normálního pořadí (anihilační vpravo) pomocí komutační relace.

V normálním pořadí je výraz složený z $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ ve tvaru, kdy anihilační operátory jsou v každém členu vpravo. Tedy například ${a^\dagger}^2 a^3$. Toho docílíme použitím komutační relace na členy obsahující anihilační operátor nalevo od kreačního. Proč je to užitečné? Často potřebujeme vypočítat střední hodnotu operátoru vyjádřeného pomocí $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ pro základní stav. Tedy v normálním pořadí $\langle 0|{a^\dagger}^m a^n|0\rangle$. Jelikož $a|0\rangle = 0$, všechny členy s a vpravo ihned vypadnou a zbydou jen členy s $m = 0$ a $n = 0$, tedy čísla.

Dobrovolné: ▷ Vyjádřete operátor počtu excitací $a^\dagger a$ v x-reprezentaci, z výsledku vytkněte $\hbar\omega$, identifikujte Hamiltonián a odvoďte výraz pro Hamiltonián, který obsahuje $a^\dagger a$.

∞ Střední hodnoty

V minulém cvičení jsme počítali střední hodnoty operátorů x a x^2 přímo v x-reprezentaci. Zvyšovací a snižovací operátory nám umožňují tyto hodnoty také vypočítat a navíc bez použití explicitní integrace.

▷ Vypočtěte střední hodnotu operátoru x pomocí a a $a^\dagger$ a znalosti jejich akce na stavy kvantového oscilátoru.

▷ Vypočtěte střední hodnoty operátorů p a x^2.

▷ Vypočtěte akci operátoru p^2 na stav $|n\rangle$. Tedy na stav $|n\rangle$ operátorem p^2 zapůsobte. Výsledek obložte zleva stavem $\langle n|$ a dopočtěte střední hodnotu. (Někdy je takovýto postup užitečný, je dobré jej znát.)

▷ Ověřte platnost relací neurčitosti pro obecný stav $|n\rangle$.