Úkol 23. 3. 2021

Relace neurčitosti

Cílem bude vypočítat tzv. relace neurčitosti pro vlnovou funkci harmonického oscilátoru. Relace neurčitosti říkají, že poloha a hybnost nemohou být určeny přesně zároveň, matematicky

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \langle (p - \langle p \rangle)^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}\,.$$

Z matematiky tyto relace také plynou jako důsledek toho, že x a p spolu nekomutují. Ekvivalentní důvod je ten, že vlastní funkce hybnosti jsou rovinné vlny $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px}$. To je mimochodem DeBroglieho vztah: V rovnici vlnění obsahující e^{ikx} jsme za vlnový vektor k dosadili $k = \frac{p}{\hbar}$. Faktor před exponencielou je normalizace. Z tohoto vztahu plyne, že chceme-li vlnovou funkci $\psi(x)$ vyjádřit jako funkci p, uděláme to pomocí Fourierovy transformace:

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar}px} dx\,.$$

Rovinné vlny tvoří ortonormální bázi, jsou tedy na sebe kolmé. Tento vztah tedy můžeme také chápat tak, že chceme vědět, jak moc přispívá rovinná vlna s hybností p k vlnové funkci $\psi(x)$. To je podstata Fourierovy transformace.

Podstatu relací neurčitosti můžeme vidět z rovnice pro rovinnou vlnu. Rovinná vlna má nějakou konkrétní hybnost p, ta je tzv. "ostrá". Na druhou stranu její poloha v x je vpodstatě neohraničená. V reálu částice bude mít nějakou ohraničenou polohu, ale tím pádem už nebude mít jednu hodnotu hybnosti.

Počítání

Na cvičeních jsme používali vlastní funkci základního stavu kvantového oscilátoru

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\,, \tag{1}$$

pro kterou jsme vypočetli střední hodnotu x, x^2 a p^2. V úkolu si výpočty zopakujeme pro f_0 v p-reprezentaci (tedy jako funkce p).

▷ Vypočtěte Fourierovu transformaci $\psi_0(x)$, tedy integrál

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) e^{-\frac{i}{\hbar}px} dx\,.$$

Výsledek by měl být

$$f_0(p) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\hbar}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 p^2}{2\hbar^2}}\,.$$

Jak vidíte, Fourierovou transformací gausovky jsme opět dostali gausovku, jen nyní v p.

▷ Ověřte, že $f_0(p)$ je normalizovaná na 1.

Máme-li stavy vyjádřené pomocí hybnosti, musíme pomocí hybnosti také vyjádřit operátory. Tady nepůjdeme do detailu, bude nám zatím stačit, že $\hat{p}\psi(p) = p\psi(p)$ a $\hat{x}\psi(p) = i\hbar\frac{d}{dp}\psi(p)$.

▷ Vypočtěte střední hodnoty x, x^2, p a p^2 v p-reprezentaci pro $\psi_0(p)$.

Střední hodnoty x a p by opět měly vyjít nulové. Vzoreček pro relace neurčitosti tedy můžeme upravit na

$$\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}\,.$$

$\triangleright$ Dosazením za α ověřte, že pro základní stav kvantového oscilátoru relace platí.