Domácí úkol 20. 4. 2022

Vlastní stavy operátoru L_x

Uvažujme částici ve stavu s kvantovým číslem orbitálního momentu hybnosti rovným jedné, $l = 1$. Budeme uvažovat kvantování momentu podél osy z. Naším cílem bude odvodit vlastní funkce (jako funkce θ a ϕ) operátoru L_x.

▷ Jaké jsou možné hodnoty průmětu momentu na osu z? Jaká je velikost momentu hybnosti L^2?

Vlastní funkce operátoru L_z mají pro $l = 1$ ve sférických souřadnicích tvar

$$\begin{aligned} Y_1^1 &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \\ Y_1^{-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

spodní index je vlastní číslo velikosti momentu hybnosti, horní je vlastní číslo projekce na osu z.

V bázi vlastních stavů L_z (předešlé funkce) je maticová reprezentace operátoru L_x dána maticí

$$\mathbf{L}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

▷ Bez výpočtu: Jaká by měla mít matice $\mathbf{L}_x$ vlastní čísla?

▷ Vypočtěte vlastní čísla matice $\mathbf{L}_x$ a vlastní vektor odpovídající nejvyšší vlastní hodnotě.

Vlastní vektor matice $\mathbf{L}_x$ máme nyní vyjádřený v bázi vlastních stavů L_z. Můžeme přejít opět do sférických souřadnic a použít explicitní vyjádření těchto stavů, tedy funkce (1).

▷ Vypočtěte vlastní stav L_x (ten jeden, co máme jako vektor) ve sférických souřadnicích. Označme ho třeba ψ_{x1}.

Operátor L_x ve sférických souřadnicích je

$$L_x = i\hbar \left(\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \right) . \tag{3}$$

▷ Ověřte, že ψ_{x1} je vlastní funkcí operátoru L_x a že vlastní číslo taky sedí.

▷ Ověřte, že ψ_{x1}, tedy vlastní stav operátoru L_x **není** ortogonální na Y_1^1, tedy vlastní stav operátoru L_z. Výpočet proveďte jednak ve sférických souřadnicích a také pomocí vektorového vyjádření obou stavů.