Úkol 2. 3. 2022

Jako v minulých cvičeních budeme uvažovat funkce $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\phi$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos n\phi$ a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ na intervalu $(0, 2\pi)$, s $n \in N$. Už víme, že tvoří ortonormální bázi, tedy jsou na sebe kolmé a normované na 1. Tedy pokud použijeme skalární součin

$$\langle i|j\rangle = \int_0^{2\pi} i^*(\phi) j_(\phi) d\phi\,,$$

kde $i(\phi)$ a $j(\phi)$ jsou nějaké obecné funkce dané báze.

Pro funkce budeme používat krátké značení pomocí ketů a říkat jim stavy

$$|s_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(n\phi) \tag{1}$$

$$|c_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(n\phi) \tag{2}$$

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,. \tag{3}$$

Opět budeme uvažovat operátory $\hat{A} = i\frac{d}{d\phi}$ a $\hat{B} = \sin\phi$. Z minula víme, jak tyto operátory působí na stavy $|i\rangle$:

$$\hat{A}|0\rangle = 0\,, \quad \hat{A}|s_n\rangle = in|c_n\rangle\,, \quad \hat{A}|c_n\rangle = -in|s_n\rangle\,.$$

Během cvičení jsme vypočetli maticovou reprezentaci operátoru $\hat{A}$. Její část vypadá takto:

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Jedná se o část odpovídající stavům $|s_2\rangle$, $|s_1\rangle$, $|0\rangle$, $|c_1\rangle$ a $|c_2\rangle$ **v tomto pořadí**.

V následujících úlohách se omezíme na $2{\times}2$ podprostor tvořený stavy $|s_1\rangle$ a $|c_1\rangle$.

▷ Najděte vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. (Měli byste mít z cvičení.)

▷ Najděte vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ (včetně normalizace). (Možná máte z cvičení.)

▷ Proveďte rotaci do báze nových vlastních stavů pro subprostor definovaný stavy s vlastnímu čísly ± 1.

Rotace se provádí pomocí matice $\mathbf{U}$, která obsahuje vlastní vektory ve sloupečcích vedle sebe následujícím způsobem:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{U}^+\mathbf{A}\mathbf{U}\,,$$

kde matici $\mathbf{U}^+$ získáme transpozicí a komplexním sdružením matice $\mathbf{U}$.

▷ Převeďte vlastní vektory na vlastní funkce použitím $|\psi\rangle = \sum_i c_i|i\rangle$. Opět jen pro vlastní čísla ± 1. Ověřte normalizaci a ortogonalitu těchto nových stavů.

Tady jde jen o to, abychom udělali něco, co se v lineární algebře nedělá. Naše báze odpovídá nějakým funkcím a tudíž vektory můžeme na funkce převést. (Tedy z $\frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{i}$ můžeme sestavit nějakou funkci ϕ.)

Pojďme nyní k jinému operátoru, například $\hat{V} = V$, je to tedy konstantní funkce.

▷ Vypočtěte maticovou reprezentaci operátoru $\hat{V}$ (celou).

Nyní uvažujme operátor $\hat{A}^2$.

▷ Aplikujte $\hat{A}^2$ na stavy $|s_n\rangle$ a $|c_n\rangle$ pomocí reprezentace funkcemi ϕ. (Tedy dvakrát ty funkce zderivujte.)

Nyní uvažujme jen stavy $|s_1\rangle$ a $|c_1\rangle$.

▷ Jak vypadá maticová reprezentace $\hat{A}$ v tomto prostoru? (Už bychom měli mít.)

▷ Aplikujte dvakrát matici $\mathbf{A}$ na ony dva stavy, tedy vektory, neboť ty dva stavy máme postupně reprezentované vektory $\binom{1}{0}$ a $\binom{0}{1}$

▷ Vypočtěte matici $\mathbf{A}^2$, aplikujte na oba vektory a ověřte, že je výsledek shodný.

Tímto jsme mimochodem zjistili, že $|s_1\rangle$ a $|c_1\rangle$ jsou vlastními stavy $\hat{A}^2$. Jelikož $\hat{A}^2$ je vlastně operátor kinetické energie ($\hat{A}$ je až na znaménko hybnost), tak jsme vlastně vyřešili Schrödingerovu rovnici pro kvantový rotor.

Je vidět, že pokud přidáme matici operátoru $\hat{V}$, která je diagonální, tak se nic nezmění, stavy zůstanou stejné, jen se jim změní energie. Ve kvantovce hrají větší roli energetické rozdíly, to uvidíme u konečné jámy.

Link to examples of finite wells