Cvičení 30. 3. 2022

Téma: Gausovka, zvyšovací a snižovací operátory, střední hodnoty

Na příští přednášce byste měli probírat kvantový oscilátor, systém s potenciálem $V = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$. Je to důležitý systém, tak se na něj opět budeme připravovat.

∞ Gausovky

Řešení harmonického oscilátoru obsahují gausovské funkce, e^{-Ax^2}. V minulém cvičení jsme počítali se základním a prvním excitovaným stavem, dnes budeme uvažovat i druhý excitovaný stav. Funkce jsou tyto:

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha\sqrt{\pi}}}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\\
f_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}}\frac{x}{\alpha}e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\\
f_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\alpha\sqrt{\pi}}}\left(2\frac{x^2}{\alpha^2}-1\right)e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}
\end{aligned}
$$

▷ Ověřte, že funkce popisující druhý excitovaný stav je normalizovaná na 1.

▷ Ověřte, že základní a druhý excitovaný stav jsou na sebe kolmé..

Pro tyto a další výpočty je vhodné využít následujících vzorečků:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Bx^2}dx &= \sqrt{\tfrac{\pi}{B}} & \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-Bx^2}dx &= \frac{1}{2B}\sqrt{\frac{\pi}{B}}\\
\int_{-\infty}^{\infty} x^4e^{-Bx^2}dx &= \tfrac{3}{4B^2}\sqrt{\tfrac{\pi}{B}} & \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} x^6e^{-Bx^2}dx &= \frac{15}{8B^3}\sqrt{\frac{\pi}{B}}
\end{aligned}
$$

∞ Zvyšovací a snižovací operátory

Pro systém kvantového oscilátoru existují dva zajímavé a nesmírně užitečné operátory: zvyšovací $\hat{a}^\dagger$ a snižovací $\hat{a}$. Jejich aplikací na vlastní stav kvantového oscilátoru $|n\rangle$, kde n je vlastní číslo stavu, získáme

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle\,.$$

▷ Vypočtěte, co získáme aplikací operátoru $a^\dagger a$ na stav $|n\rangle$.

Operátoru $a^\dagger a$ také říkáme operátor počtu excitací, důvod by měl být zřejmý z výsledku.

Operátory $a^\dagger$ a a můžeme také vyjádřit pomocí operátorů x a p, to bude detailněji na přednášce. Relace jsou tyto

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x+\frac{i}{m\omega}p\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x-\frac{i}{m\omega}p\right)\,.$$

Je možné si všimnout, že ve výrazu vystupuje $\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, jejím použitím se výrazy zjednodušší.

▷ Použijte x-reprezentaci operátoru p, tedy $-i\hbar\frac{d}{dx}$, identifikujte α a výrazy pro a a $a^\dagger$ upravte.

Získané operátory jsou jednoduše vyjádřením a a $a^\dagger$ v x-reprezentaci. Rovnice $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ funguje i v x-reprezentaci, což si nyní ověříme.

▷ Vypočtěte první excitovaný stav kvantového oscilátoru aplikací zvyšovacího operátoru na základní stav v x-reprezentaci.

▷ Jaký by byl výsledek použití snižovacího operátoru na základní stav?

▷ Vypočtěte druhý excitovaný stav použitím zvyšovacího operátoru na první excitovaný. Pozor, porovnejte výsledek s vyjádřením $f_2(x)$ na první straně!

∞ Práce s a a $a^\dagger$

Kreační a anihilační operátory pro harmonický oscilátor jsou užitečné a hodně se využívají. Typicky v případech, kdy je problém možné převést na oscilátor, případně soustavu oscilátorů. Obdobné operátory se také využívají pro popis mnohoelektronových systémů.

▷ Vypočtěte komutátor $[x, p]$.

▷ Vypočtěte komutační relaci pro operátory a a $a^\dagger$ s využitím $[x, p] = i\hbar$.

▷ Vyjádřete operátory x a p pomocí operátorů a a $a^\dagger$.

▷ Vyjádřete operátor x^2 pomocí a a $a^\dagger$. Výsledek převeďte do normálního pořadí (anihilační vpravo).

V normálním pořadí je výraz složený z $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ ve tvaru, kdy anihilační operátory jsou v každém členu vpravo. Tedy například ${a^\dagger}^2 a^3$. Toho docílíme použitím komutační relace na členy obsahující anihilační operátor nalevo od kreačního. Proč je to užitečné? Často potřebujeme vypočítat střední hodnotu operátoru vyjádřeného pomocí $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$ pro základní stav. Tedy v normálním pořadí $\langle 0|{a^\dagger}^m a^n|0\rangle$. Jelikož $a|0\rangle = 0$, všechny členy s a vpravo ihned vypadnou a zbydou jen členy s $m = 0$ a $n = 0$, tedy čísla.

Pro rychlíky: ▷ Vyjádřete operátor počtu excitací $a^\dagger a$ v x-reprezentaci, z výsledku vytkněte $\hbar\omega$, identifikujte Hamiltonián a odvoďte výraz pro Hamiltonián, který obsahuje $a^\dagger a$.

∞ Střední hodnoty

V minulém cvičení jsme počítali střední hodnoty operátorů x a x^2 přímo v x-reprezentaci. Zvyšovací a snižovací operátory nám umožňují tyto hodnoty také vypočítat a navíc bez použití explicitní integrace.

▷ Vypočtěte střední hodnotu operátoru x pomocí a a $a^\dagger$ a znalosti jejich akce na stavy kvantového oscilátoru.

▷ Vypočtěte střední hodnoty operátorů p a x^2.

▷ Vypočtěte akci operátoru p^2 na stav $|n\rangle$. Tedy na stav $|n\rangle$ operátorem p^2 zapůsobte. Výsledek obložte zleva stavem $\langle n|$ a dopočtěte střední hodnotu. (Někdy je takovýto postup užitečný, je dobré jej znát.)

▷ Ověřte platnost komutačních relací.

∞ Maticová reprezentace

Působení operátorů a a $a^\dagger$ je dobře vidět v maticové reprezentaci, kde se ukáže i pár jiných zajímavých věcí pro jiné operátory.

Maticovou reprezentaci operátoru $\hat{O}$ vytvoříme z čísel o_{mn} vypočtených takto $o_{mn} = \langle m|\hat{O}|n\rangle$. Čísla o_{mn} pak uspořádáme do matice $\mathbf{O}$.

▷ Vypočtěte maticovou reprezentaci operátorů a a $a^\dagger$ obecně a část pro $n \leq 3$ napište explicitně jako matici. Jsou hermitovské?

S maticemi můžeme ověřit některé z předešlých výpočtů.

▷ Ověřte komutační relaci $[a, a^\dagger] = 1$.

▷ Vypočtěte matici operátorů x a p a jejích druhých mocnin.

▷ Sestrojte matici Hamiltoniánu.