Cvičení 13. 4. 2022

Téma: Maticová reprezentace, moment hybnosti intro

Na přednášce jste měli probírat kvantový oscilátor, systém s potenciálem $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Je to důležitý systém, tak se na něj opět budeme připravovat.

V minulém cvičení jsme si ukázali zvyšovací a snižovací operátory a ukázaly jejich vztah k operátorům x a p.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x + \frac{i}{m\omega}p\right) \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\left(x - \frac{i}{m\omega}p\right) .$$

Operátory a a $a^\dagger$ působí na vlastní stavy takto:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle .$$

∞ Maticová reprezentace

Působení operátorů a a $a^\dagger$ je dobře vidět v maticové reprezentaci, kde se ukáže i pár jiných zajímavých věcí pro jiné operátory.

Pro připomenutí, maticovou reprezentaci operátoru $\hat{O}$ vytvoříme z čísel o_{mn} vypočtených takto $o_{mn} = \langle m|\hat{O}|n\rangle$. Čísla o_{mn} pak uspořádáme do matice $\mathbf{O}$.

$\triangleright$ Vypočtěte maticovou reprezentaci operátorů a a $a^\dagger$ obecně a část pro $n \leq 3$ napište explicitně jako matici. Jsou hermitovské?

S maticemi můžeme ověřit některé z předešlých výpočtů.

$\triangleright$ Ověřte komutační relaci $[a, a^\dagger] = 1$.

$\triangleright$ Vypočtěte matici operátorů x a p a jejích druhých mocnin.

$\triangleright$ Sestrojte matici Hamiltoniánu.

∞ Kvantový oscilátor v elektrickém poli

Byl za domácí úkol. Pokud má částice pohybující se v poli oscilátoru náboj a zapneme elektrické pole, přibyde v Hamiltoniánu další člen, potenciál $V = -|e|E\hat{x}$. Pomocí doplnění na úplný čtverec je možné ověřit, že základním stavem tohoto systému je opět oscilátor, jen posunutý o $x_0 = (eE)/(m\omega^2)$ s energií nižší o $\frac{1}{2}\frac{e^2E^2}{m\omega^2}$.

Proč závisí energie kvadraticky na poli? Na počátku nemá systém monopólový ani dipólový moment. Při zapnutí pole se systém polarizuje, vznikne dipól (výchylka x_0 závisí lineárně na intenzitě E). Tento indukovaný dipól interaguje s polem, které přidá další mocninu E. Kde se vzal dipól, když máme jednu částici? Předpokládáme, že v bodě $x = 0$ je částice s opačným nábojem, která se ale nehýbe. Potenciál kvantového oscilátoru působí mezi touto fixovanou částicí a tou, se kterou počítáme.

$\triangleright$ Vytvořte matici původního Hamiltoniánu a matici poruchy V'.

$\triangleright$ Diagonalizujte 2×2 podmatici nebo větší.

∞ Moment hybnosti úvod

Moment hybnosti je klasicky definován jako $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, to samé platí v kvantovce. Pokud si vektorový součin rozepíšeme, dostaneme

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) = (yp_z - zp_y, zp_x - xp_z, xp_y - yp_x) ,$$

kde jednotlivé části jsou složky vektoru momentu hybnosti.

Moment hybnosti působí v třírozměrném prostoru, tedy v těchto výpočtech vystupují tři souřadnice a tři hybnosti, přičemž platí např. $[x, y] = 0$ nebo $[x, p_z] = 0$. Pro moment hybnosti platí několik přiměřeně zajímavých vztahů, na kterých si můžeme procvičit výpočet komutátorů.

▷ Vypočtěte komutátor $[x, p_x]$ (známe, ale bude se hodit v následujícím).
▷ Vypočtěte komutátory $[x, L_x]$, $[x, L_y]$, $[x, L_z]$.
▷ Vypočtěte komutátory $[p_x, L_x]$, $[L_x, L_y]$.
▷ Vypočtěte komutátor $[L^2, L_x]$, kde $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ (skalární operátor).

Operátor momentu hybnosti má vlastní funkce, jimiž jsou sférické harmoniky. Ty můžeme použít jako bázi maticové reprezentace, případně s nimi počítat přímo. Sférické harmoniky jsou funkce úhlových souřadnic θ a ϕ.

Pro operátor celkové velikosti momentu hybnosti je možné odvodit vztah

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right) .$$

Pro složku L_z potom

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} .$$

Vlastní stavy závisejí na kvantových číslech l a m a jsou to sférické harmoniky Y_l^m, pro $l = 0$ a $l = 1$ tyto funkce

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

$$Y_1^{\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi} .$$

▷ Ověřte, že funkce jsou normalizované a na sebe kolmé.
▷ Ověřte, že funkce s $l = 1$ jsou vlastní funkce L^2 a L_z.

Platí $L^2 Y_m^l = \hbar^2 l(l+1) Y_m^l$ a $L_z Y_m^l = \hbar m Y_m^l$