Cvičení 27. 4. 2022

Téma: Moment hybnosti

Vlastní a střední hodnoty L^2 a L_z v různých reprezentacích

Budeme uvažovat stavy Y_0^0 a Y_1^0.

▹ Jaké jsou vlastní hodnoty operátorů L^2 a L_z pro dané stavy?

Oba stavy zkombinujeme do funkce $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_0^0 + Y_1^0)$.

▹ Je ψ vlastní funkce L^2 nebo L_z?

▹ Vypočtěte střední hodnotu L^2 a L_z pro ψ.

Nyní budeme výpočet opakovat ve sférických souřadnicích kde

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \text{a} \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,.$$

Dále

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \quad \text{a} \quad L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\,.$$

Tedy:

▹ Jaký je výsledek akce L_z na oba stavy?

▹ Jaká je střední hodnota L_z a L^2 pro ϕ?

Nakonec výpočet provedeme v maticové reprezentaci L_z a L^2. Bude nám stačit vytvořit matice v bázi stavů Y_0^0 a Y_1^0, případně můžeme vytvořit matice v bázi všech stavů s $l = 0$ nebo $l = 1$.

▹ Vytvořte matice L_z a L^2 ve zvolené bázi.

▹ Napište stav ψ jako vektor ve zvolené bázi a vypočtěte střední hodnotu.

Komutátory s θ a ϕ

Trochu využijeme sférické souřadnice k zopakování komutátorů.

▹ Čemu je roven komutátor $[\frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial\theta}]$? Proč?

Nyní uvažujme operátory $\sin\theta\frac{\partial}{\partial\phi}$ a $\frac{\partial}{\partial\theta}$.

▹ Bude jejich komutátor nenulový? Proč?

▹ Vypočtěte komutátor s pomocí testovací funkce $f(\theta,\phi)$.

▹ Ověřte správnost předešlého výpočtu aplikací na funkci $g(\theta,\phi) = \sin\theta e^{i\phi}$.

Maticové elementy x, y a z

Funkce Y_l^m jsou vlastní funkce L^2 a L_z. V této bázi jsou i operátory L_x, L_y, L_+ a L_- blokově diagonální, nenulový blok je vždy pro stejnou hodnotu l. Existují ale i operátory, které mají některé z mimodiagonálních bloků nenulové. Typicky se jedná o operátory obsahující $\cos\theta$ nebo $\sin\theta$, což jsou například operátory kartézských souřadnic neboť $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ a $z = \cos\theta$.

Uvažujme například sférickou část operátoru x, tedy $\sin\theta\cos\phi$. Uvažujme dále maticový element mezi základním stavem a stavy s $l = 1$.

▹ Víme-li, že sférické harmoniky tvoří ortonormální bázi, pro jaké hodnoty m budou maticové elementy $\langle Y_0^0|x|Y_1^m\rangle$ nenulové? Postupujme tak, že $\langle Y_0^0|x$ přepíšeme pomocí funkcí Y_1^m.

▹ Předešlý krok nyní ověříme explicitním výpočtem.

Uvažujme nyní úhlovou část z.

▹ Pro jakou hodnotu m bude maticový element $\langle Y_0^0|z|Y_1^m\rangle$ nenulový?

▷ Budou mít x nebo z nenulové maticové elementy $\langle Y_0^0|z|Y_l^m\rangle$ se stavy s l vyšším než 1?

Pozn.: Maticové elementy souřadnic jsou důležité neboť jsou třeba při výpočtech interakce vodíku s elektromagnetickým zářením nebo poli obecně. Z takzvané dipólové aproximace vyplynou právě maticové elementy souřadnic v první mocnině pro elektrické pole. Nutné změny l a m jsou potom tzv. výběrová pravidla.

Pozn.: Clebsch-Gordanovy koeficienty.

Spin

Uvažujme ještě maticovou reprezentaci operátorů spinu 1/2, konkrétně s_x.

$$\mathbf{s_x} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

▷ Vypočítejte vlastní čísla a stavy matice s_x.

▷ Využijte $O = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|$ pro zpětný výpočet maticové reprezentace operátoru.

▷ Jak bude vypadat matice s_x, pokud v předešlém vzorci použijeme bázi vlastních stavů s_x?

Užitečné vzorečky

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$
$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$
$$Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}.$$

navíc $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{i\phi}$.

Pozn.: Povšimněme si, že pro $l = 1$ vystupuje $\sin\theta$ nebo $\cos\theta$ v první mocnině, pro $l = 2$ jsou geometrické funkce dohromady v mocnině druhé. To je obecné a je lepší si to zapamatovat. Dále vlastní hodnotu L_z můžeme vidět z exponentu exponenciely, která má tvar $e^{im\phi}$.