Domácí úkol 17. 3. 2021

Použijeme opět stav $|0\rangle$, jako v předešlých úkolech. Jeho reprezentace v x a p prostoru je

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \\ f_0(p) &= \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\hbar}\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2 p^2}{2\hbar^2}} . \end{aligned}$$

Oproti předešlým domácím úkolům se nyní ve výrazech vyskytují konstanty $\hbar$ a $\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$, které souvisejí s tím, že stav $|0\rangle$ odpovídá řešení Schrödingerovy rovnice pro částici o hmotnosti m v harmonickém potenciálu ($V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$).

Na cvičeních jsme pro stav $|0\rangle$ vypočetli střední hodnotu hybnosti p a kvadrátu hybnosti p^2 v x a p reprezentaci. *Pozn.: Kinetická energie je $\frac{p^2}{2m}$ i v kvantové mechanice (bez relativity).* Za úkol je vypočítat střední hodnotu polohy x a jejího kvadrátu x^2 a použít to ve dvou zajímavých vztazích.

Na přednášce byl odvozen výraz pro operátor hybnosti v x reprezentaci. Prostě: pokud pracujeme se stavy jako s funkcemi x v jedné dimenzi, tak co je třeba dosadit za operátor hybnosti $\hat{p}$. Výsledek je $-i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

▷ Postup zopakujte pro určení p reprezentace operátoru x. Výsledek by měl vyjít analogicky.

▷ Jaká je střední hodnota operátoru x pro stav $|0\rangle$? Napište integrál pro střední hodnotu v x a p reprezentaci a alespoň jeden argument, proč je výsledek nula.

▷ Jaká je střední hodnota operátoru x^2 pro stav $|0\rangle$? Vypočtěte jak v x reprezentaci, tak i v p reprezentaci. V prvním případě tedy počítáme $\int \psi^*(x) x^2 \psi(x) \mathrm{d}x$, v druhém $\int \psi^*(p) x^2 \psi(p) \mathrm{d}p$, přičemž obě ψ jsou na začátku zadání a x v p reprezentaci jste odvodili. Výsledky by se měly shodovat.

▷ Nyní vypočtěte střední odchylky $\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ a obdobně pro Δp. Vynásobením obou čísel zjistíte, že pro stav $|0\rangle$ platí $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$. To je v souladu s tzv. Heisenbergovými relacemi neurčitosti, které praví, že $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ pro libovolný systém. Základní stav harmonického oscilátoru je zajímavý tím, že pro něj je $\Delta x \Delta p$ minimální možné.

▷ Dosaďte střední hodnoty pro p^2 a x^2 do Hamiltoniánu harmonického oscilátoru $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$. Hamiltonián popisuje systém, první člen je kinetická energie, druhý je potenciál. Bude třeba rozepsat α. Výsledek by měl být $\frac{1}{2}\hbar\omega$, což je energie základního stavu harmonického oscilátoru.