Domácí úkol 14. 4. 2021

Mějme oscilátor centrovaný na $x = 0$, jeho vlastní stavy budeme značit $|n\rangle$. Základní stav je tedy $|0\rangle$, jeho x-reprezentaci budeme psát $f_0(x)$. Vedle něho si představme další oscilátor se stejným parametrem ω, jen centrovaný na $x = x_0$, jak je ilustrováno na obrázku. Ten má také vlastní základní stav, budeme ho značit $|0_T\rangle$ a $f_T(x)$ jako funkci souřadnice x.

▷ Napište funkci základního stavu posunutého oscilátoru (v x-repre).

Bude nás zajímat rozvoj základního stavu posunutého oscilátoru v bázi funkcí oscilátoru centrovaného na $x = 0$. Tedy rozvoj $|0_T\rangle = \sum_n c_n|n\rangle$ ve kterém hledáme koeficienty c_n. Jak je v kvantové mechanice časté, výpočet je možné udělat několika způsoby. V případě, že nenajdeme nějaký analytický vzorec pro c_n s n libovolným, tak se musíme spokojit jen s výpočtem několika c_n. Základní způsob, jak vypočítat c_n je pomocí přímého výpočtu $c_n = \langle n|0_T\rangle$.

▷ Vypočtěte koeficient c_0 pomocí explicitní integrace, tedy $\langle 0|0_T\rangle$.

V tomto případě je přímý výpočet možný, ale často tomu tak není a musíme se uchýlit k přibližným výpočtům. Následující příklad nám umožní si ukázat, co je možné s anihilačními a kreačními operátory provádět. V případě posunutého oscilátoru budeme postupovat tak, že funkci $f_T(x)$ vyjádříme jako $f_T(x) = f_0(x)g(x)$.

▷ Přepište základní stav posunutého oscilátoru $f_T(x)$ do tvaru $f_T(x) = f_0(x)g(x)$.

To nám umožní vypočítat koeficienty c_n podle $c_n = \langle n|0_T\rangle = \langle n|g|0\rangle$. Funkci $g(x)$, či spíše její Taylorův rozvoj, si přitom rozepíšeme s pomocí anihilačních a kreačních operátorů.

▷ Rozepište funkci $g(x)$ pomocí Taylorova rozvoje do 4. řádu podle x.

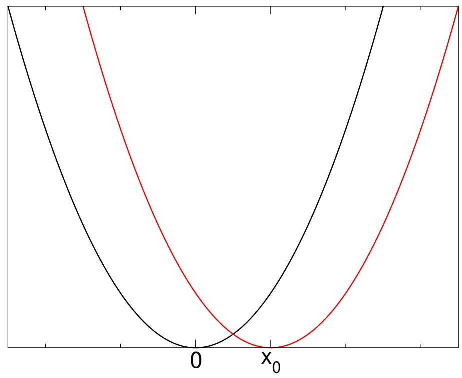
Nyní jsme dospěli do stavu, kdy nám pro výpočet koeficientů stačí vyčíslit maticové elementy funkce $g(x)$. (Toto je samozřejmě mnohem horší než přímá integrace, ale u složitějších systémů nám často nic jiného nezbývá.) Při použití anihilačních a kreačních operátorů je třeba se nejdříve zamyslet, po správné úvaze se většinou výpočet značně zjednoduší. Budeme nyní uvažovat jen příspěvky k c_0, tedy $\langle 0|g|0\rangle$. Pro tyto maticové elementy je podstatné uvážit to, že po působení všech operátorů a a $a^\dagger$ v nějakém členu se musíme dostat zpět do základního stavu, jinak bude maticový element nulový.

▷ Některé členy Taylorova rozvoje funkce $g(x)$ budou mít nulové příspěvky k $\langle 0|g|0\rangle$. Které to budou?

▷ Vyjádřete operátory x^2 a x^4 pomocí a a $a^\dagger$. (x^4 není třeba převádět do normálního pořadí, ale je dobré vypočítat $x^4 = x^2x^2$, kde x^2 je v normálním pořadí.) Opět budou přispívat jen některé členy, které? Vyčíslete je.

▷ Jedním z přispívajících členů x^4 je $a^2{a^\dagger}^2$. Ověřte, že vyjádřený takto a v normálním pořadí (a vpravo) dává stejnou střední hodnotu pro stav $|0\rangle$.

▷ Porovnejte výsledek obdržený pro $\langle 0|g|0\rangle$ s $g(x)$ rozvinutou do 4. řádu podle x s výsledkem explicitní integrace rozvinutým do stejného řádu.


0
x0