Domácí úkol 3. 3. 2021

Mějme funkce

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \tfrac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f_1(x) &= \sqrt{\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}} x e^{-\frac{x^2}{2}} \\ f_2(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} (2x^2-1) e^{-\frac{x^2}{2}} \,, \end{aligned}$$

o kterých víme, že tvoří ortonormální bázi. Budeme je také značit jako $|0\rangle$, $|1\rangle$ a $|2\rangle$, tedy jako stavy částice.

Skalární součin máme definovaný

$$f_i \cdot f_j = \int_{-\infty}^{\infty} f_i^*(x) f_j(x) \mathrm{d}x \,,$$

budeme značit také $\langle i|j\rangle$. Hvězdička značí komplexní sdružení, které v tomto případě nehraje roli, ale obecně je třeba na něj nezapomínat. (I u těchto reálných funkcí se objeví komplexní faktor pokud uvažujeme vývoj v čase.)

Nyní se vrátíme k pojmu operátor, což je objekt, který po působení na funkci vrátí opět funkci. Jednoduchý operátor můžeme získat například ze souřadnice x a funguje způsobem $\hat{x} : f(x) \to x f(x)$, kde stříška značí operátor a $f(x)$ je obecná funkce. Tedy operátor $\hat{x}$ funguje tak, že libovolnou funkci vynásobí funkcí x. Pokud je výsledek tvaru $\hat{O}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$, tedy působením operátoru $\hat{O}$ na stav $|\psi\rangle$ získáme násobek původní funkce, pak je $|\psi\rangle$ vlastní funkcí operátoru $\hat{O}$. Je to tedy obdobné situaci u matic.

▷ Zjistěte, zda jsou funkce f_i vlastními funkcemi operátoru $\hat{x}$. Pokud ne, převeďte pro f_0 a f_1 výsledek na tvar

$$x f_i = \sum_n c_n f_n \quad \text{nebo tedy} \quad x|i\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \,. \quad (1)$$

Jak zjistíme, působením x na f_i získáme kombinaci stavů s i pouze o jedna vyšším a o jedna nižším. (Je zajímavé, že operátor derivace působí obdobně, jen se liší znaménkem.)

Pro operátory také můžeme vypočítat střední hodnotu $\langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle$. Pro operátor x je střední hodnota odpovědí na otázku: Pokud budeme opakovaně měřit polohu částice, jaký bude průměr naměřených hodnot? Střední hodnotu x vypočteme pomocí integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} f_i^* x f_i \mathrm{d}x$.

▷ Jaká je střední hodnota x pro funkce f_0, f_1 a f_2?

Místo integrace můžeme také při výpočtu střední hodnoty pracovat přímo se stavy $|i\rangle$ a využít znalosti působení operátoru na stav, t.j. pravé části rovnice (1). Víme-li, že $x|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$, potom střední hodnotu pro stav $|0\rangle$ můžeme vypočítat jako

$$\langle 0|x|0\rangle = \langle 0|\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle = 0 \,,$$

kde v prvním kroce zapůsobil operátor x na stav $|0\rangle$, poté jsme vytkli odmocninu dopředu a nakonec nám zbyl skalární součin stavů $|0\rangle$ a $|1\rangle$, který nemusíme počítat, protože stavy tvoří ortonormální bázi. Pokud je něco v zápisu matoucí, je možné si představit místo jednotlivých stavů funkce a místo skalárního součinu integrál.

▷ Vypočtěte $\langle 1|x|1\rangle$ s použitím znalosti působení x na stav $|1\rangle$.

Nyní si představme, že místo toho, že operátor obložíme zleva i zprava stejným stavem ($\langle n|\hat{O}|n\rangle$), obložíme jej zleva a zprava různými stavy, tedy $\langle n|\hat{O}|m\rangle$. Tomu říkáme maticový element, neboť uspořádáním všech těchto hodnot pro všechny možné kombinace n a m získáme matici, které říkáme matice operátoru. Na diagonále této matice se vyskytují střední hodnoty.

▷ Vypočtěte matici operátoru x v bázi stavů $|0\rangle$, $|1\rangle$ a $|2\rangle$. Využijte znalosti středních hodnot, znalost působení operátoru x na stavy $|0\rangle$, $|1\rangle$ a $|2\rangle$ a to, že působením x na n získáme kombinaci stavů $|n+1\rangle$ a $|n-1\rangle$. Matice je také symetrická. Výsledkem by tedy měla být matice 3×3.

▷ Umocněním 3×3 podmatice operátoru x na druhou získejte část matice operátoru x^2. Ověřte výsledek pomocí výpočtu střední hodnoty x^2 pro stav $|0\rangle$. (Použijte explicitní integraci přes proměnnou x a integrály přes gaussovky.)