Cvičení 3. 3. 2021

Téma: Procvičování lineární algebry

Mějme matice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bez faktoru $\frac{1}{2}$ se jedná o tzv. Pauliho matice, které mají několik zajímavých vlastností.

Pro tyto matice:

- Vypočtěte jejich druhou mocninu.
- Vypočtěte jejich vlastní čísla a (normalizované) vlastní vektory, výsledek ověřte přímým výpočtem působení matice na vektor. Normalizovaným vlastním vektorům budeme říkat vlastní stavy a budeme je značit např. $|a_+\rangle$ pro vlastní vektor matice A s kladným vlastním číslem.
- Ukažte, že vlastní stavy jedné matice tvoří ortonormální bázi, tedy $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$. Ukažte, že vlastní stavy různých matic nejsou na sebe kolmé.

V posledním kroku jsme vypočítali skalární součin dvou stavů, tedy projekci jednoho stavu na jiný. V kvantové mechanice je taková věc důležitá: nachází-li se částice v libovolném počátečním stavu, projekcí na vlastní stavy operátoru (matice) dostaneme koeficient rozvoje do báze vlastních stavů matice. Tedy platí

$$|\psi\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|\psi\rangle\,,$$

kde $|\psi\rangle$ je počáteční stav, $|i\rangle$ je vlastní stav operátoru (matice), zmíněný koeficient rozvoje je potom $\langle i|\psi\rangle$. Kvadrát koeficientu rozvoje dá pravděpodobnost naměření dané vlastní hodnoty matice. Vypočtěte koeficienty rozvoje stavu $|c_+\rangle$ v bázi vlastních stavů matice B, a také kvadráty jejich absolutních hodnot.

V kvantové mechanice často používáme termín střední hodnota měření, jedná se o hodnotu $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$, kde $\hat{A}$ je operátor. Pomocí vektorů a matic střední hodnotu vypočteme jako v^+Av, kde v je vektor a A matice. Vypočtěte střední hodnotu C pro stav $|c_+\rangle$, střední hodnotu A pro stav $|a_+\rangle$, a dále $\langle c_+|\hat{A}|c_+\rangle$ a $\langle a_+|\hat{C}|a_+\rangle$. Zjistíme, že střední hodnota daného stavu odpovídá vlastní hodnotě, pro nevlastní stav je střední hodnota určena rozvojem do vlastních stavů.

Pro matice a operátory platí zajímavá relace

$$O = \sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|\,,$$

kde O je operátor (matice), suma je přes vlastní stavy, λ_i jsou vlastní hodnoty a $|i\rangle$ odpovídající vlastní vektory. Pomocí tohoto stavu vypočtěte matice A a C.

Abychom mohli s maticemi pracovat, máme je vyjádřené v nějaké bázi. Používáme bázi vlastních stavů matice C, proto jsou také tyto stavy $\binom{1}{0}$ a $\binom{0}{1}$. Ale často chceme pracovat v jiné bázi, například v bázi vlastních vektorů matice A. Potom musíme provést transformaci báze pomocí matice transformace U, do které seřadíme vlastní vektory nové báze. Transformace matice je pak $O' = U^+OU$. Proveďte transformaci A do báze jejích vlastních vektorů.

Matice A, B a C odpovídají měření spinu podél os x, y a z. Matici měření podél libovolné osy $\vec{n}$ získáme jako

$$S_n = \vec{n} \cdot (A, B, C)\,,$$

kde (A, B, C) je vpodstatě tenzor řádu tři. Výsledkem je tedy matice 2×2. Pro $n = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ vypočtěte matici S_n a ověřte, že vlastní vektor získaný obdobným způsobem jako matice S_n je jejím vlastním stavem.