6. soutěžní série

18. 12. 2023

Úloha 1. Je dána konečná množina M navzájem různých celých čísel n_i taková, že $\prod_i n_i$ je dělitelem $\prod_i (n_i + m)$ pro každé $m \in \mathbb{Z}$. Musí M nutně obsahovat 1 nebo -1? (5 bodů)

Úloha 2. V misce je 23 bonbonů z bílé čokolády a 24 z mléčné čokolády, oba druhy ve stejném obalu. Adam při každé návštěvě misky náhodně vybere jeden, rozbalí ho a sní. Pak rozbalí další a pokud je stejného druhu, opět ho sní. Takto pokračuje dokud nerozbalí bonbon opačného druhu, ten pak zabalí, vrátí zpět do misky a odejde. Takto navštěvuje misku, dokud nesní poslední bonbon. Jaká je pravděpodobnost, že poslední bonbon bude z mléčně čokolády? (10 bodů)

Úloha 3. Nechť řada $\sum a_n$ s nezápornými členy konverguje a nechť $a_i \leq 100a_n$ pro všechny dvojice $n \leq i \leq 2n$. Ukažte, že $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. (10 bodů)

Úloha 4. Nechť bod P leží uvnitř kruhu s hraniční kružnicí k, ale ne v jeho středu. Dokažte, že pak existuje právě jeden bod P' vně kruhu, pro který je hodnota výrazu

$$\frac{|XP'| + |YP'|}{|XY|}$$

nezávislá na volbě tětivy $XY \ni P$ kružnice k. (15 bodů)

6th contest series

18. 12. 2023

Problem 1. Given a finite set M of pairwise distinct integers n_i such that $\prod_i n_i$ is a divisor of $\prod_i (n_i + m)$ for each $m \in \mathbb{Z}$. Does M neccessarily contain 1 or -1? (5 points)

Problem 2. In a bowl, there are 23 white chocolate candies and 24 dark chocolate candies, both types in the same package. Each time Adam visits the bowl, he randomly takes one candy, unwraps it, and eats it. Then he unwraps another candy and if it is of the same kind, he eats it again. This continues until he unwraps a candy of the opposite kind. Then he rewraps it, puts it back into the bowl, and leaves. He is visiting the bowl like this until he eats the last candy. What is the probability that the last candy is made of dark chocolate?

(10 points)

Problem 3. Let the series $\sum a_n$ of non-negative terms converge and let $a_i \le 100a_n$ for all couples (i, n) satisfying $n \le i \le 2n$. Prove $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. (10 points)

Problem 4. Let a point P lie in the interior of the disc with a boundary circle k but not in its center. Prove that there exists a unique point P' outside the disc, for which the value of the expression

$$\frac{|XP'| + |YP'|}{|XY|}$$

is independent of the choice of a chord $XY \ni P$ of the circle k.

(15 points)