6. soutěžní série – řešení

1. Ano. Předpokládejme pro spor, že 1 ani -1 v M neleží. V M nemůže ležet nula, jinak by $\prod(n_i + m) = 0$ pro každé m, což zjevně nejde. Pak $0 \neq \prod(n_i - 1)\prod(n_i + 1) = \prod(n_i^2 - 1) < \prod n_i^2 = (\prod n_i)^2$. Pak je ale $|\prod n_i|$ větší než některá z nenulových hodnot $|\prod(n_i - 1)|$, $|\prod(n_i + 1)|$ a nemůže tedy být jejím dělitelem.

2. Označme $P(b, m)$ šanci, že poslední bonbon bude mléčný pro b bílých a m mléčných. Určitě je $P(b, 0) = 0$ a $P(0, m) = 1$ pro $b, m \geq 1$. Šance na snězení všech bílých nebo všech mléčných naráz je $\binom{b+m}{b}^{-1} = \binom{b+m}{m}^{-1}$. Proto je

$$P(b,m) = 2\binom{b+m}{b}^{-1} \cdot \frac{1}{2} + \left[1 - 2\binom{b+m}{b}^{-1}\right] \cdot Q(b,m),$$

kde $Q(b, m)$ je nějak vážený průměr šancí $P(b_i, m_i)$ pro $b_i, m_i \geq 1$, $b_i + m_i \leq b + m - 1$. Tedy $P(1, 1) = \frac{1}{2}$ a indukcí přes $p + m$ vyjde $P(b, m) = \frac{1}{2}$ pro $b, m \geq 1$ včetně $P(23, 24)$.

3. Podmínku ze zadání si přepišme jako $a_n \geq \frac{1}{100} a_i$ pro všechna přirozená n z intervalu $[i/2, i]$. Předpokládejme pro spor, že pro nějaké $\varepsilon > 0$ a nějakou podposloupnost a_{i_k} platí $a_{i_k} > \frac{\varepsilon}{i_k}$. Navíc můžeme předpokládat, že $i_{k+1} > 2i_k$ (jinak přejdeme k podposloupnosti, která toto splňuje). Pak ale

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\lceil i_k/2 \rceil}^{i_k} a_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\lceil i_k/2 \rceil}^{i_k} \frac{1}{100} a_{i_k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{i_k}{2}\right] \frac{1}{100} \frac{\varepsilon}{i_k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{300} = \infty,$$

což je spor.

4. Nechť O je střed k a R poloměr k. Prvně ukážeme, že pokud P' je inverz P vzhledem ke kružnici k (tj. P' leží na polopřímce OP a platí $|OP| \cdot |OP'| = R^2$), pak splňuje požadovanou podmínku. Buď X libovolný bod na kružnici k. Pak díky $|OP| \cdot |OP'| = R^2 = |OX|^2$ jsou trojúhelníky OPX a OXP' podobné, čili $|P'X| = |PX| \cdot \frac{|OX|}{|OP|}$. Pak pokud XY je tětiva k procházející P, pak $|P'X| + |P'Y| = (|PX| + |PY|) \cdot \frac{|OX|}{|OP|} = |XY| \frac{R}{|OP|}$. Tedy $\frac{|XP'|+|YP'|}{|XY|} = \frac{R}{|OP|}$, což je nezávislé na volbě XY.

Nyní ukážeme, že P' je jediný takový bod. Pro spor nechť existuje jiný takový bod, označme ho jako Q'. Jeho inverz vzhledem ke kružnici k označme Q. Protože $P' \neq Q'$, je $P \neq Q$. Tedy existuje XY tětiva k taková, že P i Q na ní leží. Označme jako A a B, resp. C a D, průsečíky přímky $Q'P$, resp. $Q'Q$, s kružnicí k označené tak, že A, resp. C, je blíž k Q' než B, resp. D. Protože XY i AB jsou tětivy k, na kterých leží P, je $\frac{|AQ'|+|BQ'|}{|AB|} = \frac{|XQ'|+|YQ'|}{|XY|}$. Zároveň z předchozího odstavce plyne, že Q' má uvažovanou vlastnost i vůči Q. Tedy, protože XY i CD jsou tětivy k, na kterých leží Q, je $\frac{|XQ'|+|YQ'|}{|XY|} = \frac{|CQ'|+|DQ'|}{|CD|}$. Z toho plyne $\frac{|AQ'|+|BQ'|}{|AB|} = \frac{|CQ'|+|DQ'|}{|CD|}$.

Označme $a = |AQ'|$, $b = |BQ'|$, $c = |CQ'|$, $d = |DQ'|$. Pak dostáváme $\frac{a+b}{b-a} = \frac{|AQ'|+|BQ'|}{|AB|} = \frac{|CQ'|+|DQ'|}{|CD|} = \frac{c+d}{d-c}$, neboli $ad = bc$. Zároveň z mocnosti Q' ke kružnici k dostaneme $ab = cd$. Skombinováním těchto dvou možností dostaneme $a = c$ a $b = d$. Protože QQ' prochází O, musí být $b \leq d$ a $a \geq c$, s rovností jen když $A = C$ a $B = D$. Z toho plyne, že O, P, P', Q, Q' všechny leží na jedné přímce.

Nakonec zachovejme označení AB jako tětivu/průměr k na němž leží O, P a na jehož prodloužení leží P' a Q' a jako X a Y označme tětivu k obsahující P kolmou na AB. Ze symetrie $|Q'X| = |Q'Y|$, $|P'X| = |P'Y|$. Pak $\frac{|P'X|}{|XP|} = \frac{2|P'X|}{2|XP|} = \frac{|P'X|+|P'Y|}{|XY|} = \frac{|P'A|+|P'B|}{|AB|} = \frac{2|P'O|}{|AB|}$, čili $\frac{|P'X|}{|P'O|} = \frac{2|XP|}{|AB|}$. Analogicky $\frac{|Q'X|}{|Q'O|} = \frac{2|XP|}{|AB|}$. Tedy ze sinové věty $\frac{\sin(Q'OX)}{\sin(Q'XO)} = \frac{|Q'X|}{|Q'O|} = \frac{2|XP|}{|AB|} = \frac{|P'X|}{|P'O|} = \frac{\sin(P'OX)}{\sin(P'XO)}$. Protože $\sin(Q'OX) = \sin(P'OX) \neq 0$, je $\sin(Q'XO) = \sin(P'XO)$. Tedy P', Q' a X leží na jedné přímce. Protože zároveň P', Q', P a O leží na jedné přímce a P, X, O neleží na jedné přímce, musí být $P' = Q'$.