6. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 8. 1. 2024

Úloha 1. Rozhodněte, zda existuje spojitě diferencovatelná funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taková, že pro funkce f i f' platí, že nabývají celočíselné hodnoty právě v celých číslech.

Úloha 2. Ve městě je $n \geq 2$ ulic, v každé má Ježíšek právě jednu schránku. Každé dítě si přeje právě $n - 1$ dárků, dopis se svými přáními vhodí do schránky ve své ulici. Ježíšek našel v každé schránce aspoň jeden dopis a zjistil, že ať vybere jakkoli po jednom dopisu z každé schránky, vždy se bude některý dárek vyskytovat ve všech těchto dopisech. Ukažte, že v některé ulici si všechny děti přejí stejný dárek.

Úloha 3. Existují reálné matice A typu 2024×81 a B typu 81×2024 takové, že matice AB má na diagonále kladná čísla a mimo diagonálu záporná čísla?

Úloha 4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo m, pro něž je $3^m + 5^m - 1$ násobkem 7^n.

Úloha 5. Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla. Nalezněte supremum funkce

$$f : x \mapsto \frac{a + bx}{b + cx} + \frac{b + cx}{c + dx} + \frac{c + dx}{d + ax} + \frac{d + ax}{a + bx}$$

na množině $[0, \infty)$.

Úloha 6. Mějme v rovině konečně mnoho jednotkových uzavřených kruhů, z nichž každý protíná nejvýše tři další. Jaký největší kruh lze takovými kruhy pokrýt?

6th home series

Solutions will be presented at the seminar on January 8, 2024.

Problem 1. Decide, whether there exists a continuously differentiable function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that both functions f and f' satisfy that they attain an integer value exactly at integers.

Problem 2. There are $n \geq 2$ streets in a town, Santa Claus has exactly one mailbox in each of them. Each child wishes exactly $n-1$ gifts, he/she drops the letter with his/her wishes into the mailbox in his/her street. Santa found at least one letter in each box and realized that no matter how he chooses one letter from each box, some gift will always appear in all these letters. Show that in one of the streets all the children want the same gift.

Problem 3. Do there exist real matrices A of type 2024×81 and B of type 81×2024 such that the matrix AB has positive numbers on the diagonal and negative numbers elsewhere?

Problem 4. Prove that, for every positive integer n, there is a positive integer m such that $3^m + 5^m - 1$ is divisible by 7^n.

Problem 5. Let a, b, c, d are positive real numbers. Find the supremum of the function

$$f : x \mapsto \frac{a+bx}{b+cx} + \frac{b+cx}{c+dx} + \frac{c+dx}{d+ax} + \frac{d+ax}{a+bx}$$

on the set $[0, \infty)$.

Problem 6. There are finitely many closed unit discs in the plane such that each of them intersects at most three others. What is the radius of the biggest disc that can be covered by such discs?