5. soutěžní série

4. 12. 2023

Úloha 1. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je taková funkce, že $x \mapsto (f(x))^n$ je polynom pro všechna $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Plyne odtud, že f je polynom? (5 bodů)

Úloha 2. V kladném kvadrantu čtvercové sítě obarvíme některé jednotkové čtverečky. Je možné, aby zároveň

1) každý čtverec, jehož dvě strany leží na osách souřadnic, obsahoval více obarvených než neobarvených čtverečků,

2) každá přímka svírající úhel 45° s osami souřadnic obsahovala jen konečně mnoho obarvených čtverečků? (10 bodů)

Úloha 3. Mějme přirozená čísla k a n, n liché. Dokažte, že existuje a přirozené, pro něž $a^{32} \equiv (n+1)^3 \pmod{n^k}$. (10 bodů)

Úloha 4. Buď n přirozené číslo a x_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ čísla splňující $0 < y_i \leq x_i < 1$. Dokažte

$$\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{\ln y_1 + \cdots + \ln y_n} \leq \sqrt{\frac{1 - x_1}{1 - y_1} + \cdots + \frac{1 - x_n}{1 - y_n}}.$$

(15 bodů)

5th contest series

4. 12. 2023

Problem 1. Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be such a function that $x \mapsto (f(x))^n$ are polynomials for every $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Does it follow that f is a polynomial? (5 points)

Problem 2. The positive quadrant of a coordinate plane is divided into unit squares by lattice lines. Is it possible to color some of the unit squares so as to satisfy the following conditions:

1) each square with two sides on the coordinate axes contains more coloured squares than uncoloured ones,

2) each line that makes the angle of $45°$ with the coordinate axes intersects only finitely many coloured squares? (10 points)

Problem 3. Let k and n be positive integers with n odd. Show that there is always an a such that $a^{32} \equiv (n+1)^3 \pmod{n^k}$. (10 points)

Problem 4. Let n be a positive integer and x_i, y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ numbers satisfying $0 < y_i \leq x_i < 1$. Prove

$$\frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{\ln y_1 + \cdots + \ln y_n} \leq \sqrt{\frac{1 - x_1}{1 - y_1} + \cdots + \frac{1 - x_n}{1 - y_n}}.$$

(15 points)