4. soutěžní série – řešení

1. Ze vzorce pro součet aritmetické posloupnosti, že součet čísel $a, a+1, \ldots, a+k$ je $\frac{(k+1)(2a+k)}{2}$. Pro dané x a y umíme najít $a, k \geq 1$ taková, že $k+1 = x$ a $2a+k = y$ právě tehdy, když $k = x-1$ a $a = \frac{y-x+1}{2}$. Tedy právě tehdy, když x a y mají jinou paritu a $y > x \geq 2$. Z toho plyne, že n se dá zapsat jako součet po sobě jdoucích přirozených čísel právě tehdy, když $2n$ lze zapsat jako součin lichého a sudého čísla, obě větší než 1. To u mocniny dvojky zjevně není možné, protože všechny dělitele $2n$ krom jedničky jsou sudé. Pokud naopak n není mocnina dvojky, tak lze zapsat jako $2^t r$, kde r je liché a větší než 1. pak ale stačí použít, že $2n = 2^{t+1} \cdot r$.

2. Platí

$$2 \cdot \frac{S_n}{n^2} = \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 - \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n^2},$$

tedy stačí dokázat, že odečítaný člen se blíží nule. Protože

$$\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n^2} \leq \frac{\max a_i}{n} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

stačí dokázat, že $\frac{\max a_i}{n} \to 0$. Sporem: kdyby tomu tak nebylo, pak by pro nějaké $\varepsilon > 0$ a nekonečně mnoho n platilo $\max_{i \leq n} a_i = a_{j(n)} > \varepsilon n$. Odtud $j(n) \to \infty$ a tedy $a_{j(n)} > \varepsilon n \geq \varepsilon j(n)$ pro nekonečně mnoho členů $a_{j(n)}$. Na druhou stranu

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} \to a - a = 0,$$

což je spor.

3. Nechť je součet racionální. Všimneme si

$$\sqrt[n]{a + \sqrt{a^2-1}}\,\sqrt[n]{a - \sqrt{a^2-1}} = \sqrt[n]{a^2 - (a^2-1)} = 1,$$

takže máme výraz tvaru $b + \frac{1}{b} \in \mathbb{Q}$. Postupně umocňujme $\left(b + \frac{1}{b}\right)^k$ a induktivně dokážeme, že z $b^i + \frac{1}{b^i} \in \mathbb{Q}$, $i = 1, \ldots, k-1$ plyne $b^k + \frac{1}{b^k} \in \mathbb{Q}$. Pro $k = n$ to znamená $(a + \sqrt{a^2-1}) + (a - \sqrt{a^2-1}) = 2a \in \mathbb{Q}$, což je spor s $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. Ukážeme, že $m = 3$ pro každou hodnotu n.

Zaprvé, ukážeme, že $m = 2$ nestačí. Kdyby ano, tak priorita může nabývat jen hodnot mezi $n-1$ a $2(n-1)$. To je n hodnot, tedy aby každé město mělo jinou prioritu, musí každá být dosažena. Speciálně musí existovat město A s prioritou $n-1$ a město B s kapacitou $2(n-1)$. Ale to znamená, že všechny cesta z A mají kapacitu 1 a každá cesta z B má kapacitu 2. Protože cesta mezi A a B nemůže mít kapacitu 1 a 2 zároveň, dostáváme spor.

Zadruhé, ukážeme, že $m = 3$ vždy stačí. Pro $n = 3$ to platí - každé cestě dáme jinou hodnotu. Dále budeme postupovat indukcí. Předpokládejme, že máme konstrukci pro n. Podobně jako v předchozím odstavci si všimneme, že nejmenší možná priorita města je $n-1$, největší možná je $3(n-1)$, a tyto dvě hodnoty nemohou být dosáhnuty zároveň (protože cesta spojující tato dvě města nemůže mt zároveň kapacitu 1 a 3. BÚNO předpokládejme, že neexistuje město s prioritou $n-1$, v opačné případě postupujeme analogicky. Pak přidejme nové město a s každým již existujícím ho spojme cestou s prioritou 1. Původní města měla priority mezi n a $3(n-1)$, takže nyní mají všechna o jedna vyšší, tedy mezi $n+1$ a $3n-2$. Zároveň z induktivního předpokladu víme, že žádné dvě města mezi původními n nemají stejnou prioritu - to se nezmění ani po přičtení jedničky. Nově přidané město má prioritu n, tedy menší než všechna města v původní n-tici. Tedy ani tato priorita nemůže s žádnou jinou splývat.