3. soutěžní série – řešení

1. Ano, takových množin existuje nekonečně mnoho. Stačí pro každé přirozené $n > 1$ uvažovat $p = n^2$, $q = n^2 - 1$ a $r = 1$. Pak $p! \cdot q! \cdot r! = (n^2)! \cdot (n^2 - 1)! = n^2((n^2 - 1)!)^2 = (n(n^2 - 1)!)^2$.

2. Vyhrávající strategii má první (začínající) hráč. Stačí, když bude stále obracet ten samý kámen. Předpokládejme pro spor, že se první hráč (hrajícího tuto strategii) dostane svým tahem do situace, která již ve hře nastala dříve. Dříve ale nemohla nastat *po tahu prvního* hráče, protože pak by se opakovala už situace před jeho tahem. A nemohla nastat ani *po tahu druhého* hráče, protože po tahu druhého hráče je vždy modrou stranou nahoru lichý počet kamenů a po tahu prvního sudý.

3. Odpověď je 15. Ukážeme, že obecně pro matice $n \times n$ je odpověď $n^2 - 1$. Protože je známo, že stopa matice (tj. součet prvků na diagonále) je lineární a pro každé matice A, B je $tr(AB) = tr(BA)$, platí $tr(AB - BA) = 0$. Takže můžeme dostat jen matice s nulovou stopou, což je jednoduše prostor dimenze $n^2 - 1$.

Nyní označme P_{ij} matici $n \times n$ obsahující jedničku na pozici (i, j) a nuly na všech ostatních pozicích. Všimněme si, že $P_{ij}P_{k\ell}$ se rovná 0, pokud $j \neq k$ a $P_{i\ell}$ pokud $j = k$. Tím dostáváme, že pro všechna $i \neq j$ náš prostor obsahuje $P_{ii}P_{ij} - P_{ij}P_{ii} = P_{ij}$ a $P_{ij}P_{ji} - P_{ji}P_{ij} = P_{ii} - P_{jj}$. Zbývá ukázat, že každá matice s nulovou stopou se dá takto získat.

Buď X matice s nulovou stopou. Pak ji můžeme zapsat jako $X = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}P_{ij}$, kde $x_{ij} \in \mathbb{R}$. Zjevně $\sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} x_{ij}P_{ij}$ v našem prostoru leží, zbývá teda ukázat, že tam leží i $\sum_{i=1}^{n} x_{ii}P_{ii}$. Protože X má nulovou stopu, je $\sum x_{ii} = 0$, čili $x_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} x_{ii}$. Tedy $\sum_{i=1}^{n-1} x_{ii}(P_{ii} - P_{nn}) = \sum_{i=1}^{n-1} x_{ii}P_{ii} - \sum_{i=1}^{n-1} x_{ii}P_{nn} = \sum_{i=1}^{n-1} x_{ii}P_{ii} + x_{nn}P_{nn} = \sum_{i=1}^{n} x_{ii}P_{ii}$, z čehož už jsme hotovi.

4. Funkce f a g nemusí být spojité, takže našim cílem musí být ukázat, že množina $A_0 = \{x \in \mathbb{R} |\, f(x) + g(x) < 0\}$ má menší mohutnost než otevřené intervaly. Nechť $x, y \in A_0$, pak jistě musí platit také $f(x) + g(x) < -\frac{1}{n}$, $f(y) + g(y) < -\frac{1}{n}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Z $f(x) + g(y) > 0$ plyne $f(x) - f(y) > -g(y) - f(y) > \frac{1}{n}$. Z $f(y) + g(x) > 0$ plyne $f(y) - f(x) > -g(x) - f(x) > \frac{1}{n}$. Každopádně $|f(x) - f(y)| > \frac{1}{n}$, a protože lze zvolit pouze spočetně mnoho reálných čísel tak, aby mezi každými dvěma byla mezera $\frac{1}{n}$, je $A_{-\frac{1}{n}} = \{x \in \mathbb{R} |\, f(x) + g(x) < -\frac{1}{n}\}$ spočetná. Tedy také $A_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{-\frac{1}{n}}$ je spočetná a nemůže obsahovat interval, který by měl nespočetně mnoho prvků.

Příklad funkcí f, g s $A_0 = \mathbb{Q}$: Očíslujme si racionální čísla $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Volme $f(q_i) = i$, $g(q_i) = -i - \frac{1}{2}$ a $f(x) = g(x) = 1$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.