2. soutěžní série

23. 10. 2023

Úloha 1. Najděte všechna řešení rovnice

$$(1 + x!)(1 + y!) = (x + y)!$$

v oboru nezáporných celých čísel. (5 bodů)

Úloha 2. Nechť a je kladné reálné číslo. Ukažte, že existuje právě jedno $b > 0$ takové, že

$$\frac{b^x}{x^b} \geq a^{b-x} \text{ pro všechna } x > 0.$$

(10 bodů)

Úloha 3. Nechť $B(s, r)$ je otevřený kruh se středem s a poloměrem r. Rozhodněte, zda je možné v rovině zvolit posloupnost středů $s_1, s_2, \dots$ takovou, že kruhy $B(s_n, \frac{1}{n})$ jsou navzájem disjunktní a limita $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje. (10 bodů)

Úloha 4. Komplexní nekonstantní polynomy p a q mají stejné (komplexní) kořeny, ale ne nutně stejné násobnosti kořenů. To samé platí pro $p + 1$ a $q + 1$. Plyne odtud, že $p = q$? (15 bodů)

2nd contest series

23. 10. 2023

Problem 1. Find all solutions to the equation

$$(1 + x!)(1 + y!) = (x + y)!$$

in the domain of non-negative integers. (5 points)

Problem 2. Let a be a positive real number. Show that there exists a unique $b > 0$ s. t.

$$\frac{b^x}{x^b} \geq a^{b-x} \text{ for all } x > 0.$$

(10 points)

Problem 3. Denote $B(s, r)$ the open disc with center s and radius r. Decide, whether it is possible to find a sequence of centers $s_1, s_2, \ldots$ in the plane s.t. discs $B(s_n, \frac{1}{n})$ are pairwise disjoint and the limit $\lim_{n\to\infty} s_n$ exists. (10 points)

Problem 4. Complex non-constant polynomials p and q have the same (complex) roots with not neccessarily the same multiplicities. The same is true for polynomials $p+1$ and $q+1$. Do these conditions imply $p = q$? (15 points)