1. soutěžní série

9. 10. 2023

Úloha 1. Buď $M \subset \mathbb{R}$ uzavřená na násobení. Nechť A a B jsou disjunktní podmnožiny M, jejichž sjednocení je M. Předpokládejme, že součin libovolných tří prvků (ne nutně různých) z A leží v A a součet libovolných tří prvků z B leží v B. Ukažte, že aspoň jedna z množin A, B je uzavřená na násobení. (5 bodů)

Úloha 2. Dokažte, že pro každou nekonstantní funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existují reálná čísla x, y taková, že $f(x+y) < f(xy)$. (10 bodů)

Úloha 3. Určete největšího společného dělitele všech čísel z množiny $\{n^{13} - n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. (10 bodů)

Úloha 4. Buď $S_n = \{(x, y) |\ x = 1, 2, \ldots, n,\ y = 1, 2, 3\}$. Cestou věže přes S_n označíme posloupnost $p_1, p_2, \ldots, p_{3n} \in S_n$ takovou, že vzdálenost p_i a p_{i+1} je jednotková pro $1 \leq i < 3n$ a každý prvek S_n je v posloupnosti obsažen právě jednou. Kolik existuje cest věže přes S_n takových, že $p_1 = (1, 1)$ a $p_{3n} = (n, 1)$? (15 bodů)

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`

1st contest series

9. 10. 2023

Problem 1. Let $M \subset \mathbb{R}$ be closed under multiplication. Let A and B be disjoint subsets of M whose union is M. Assume that the product of any three (not necessarily distinct) elements of A is in A and that the product of any three elements of B is in B. Show that at least one of the two subsets A, B is closed under multiplication. (5 bodů)

Problem 2. Prove that for every non-constant function $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ there exist real numbers x, y such that $f(x+y) < f(xy)$. (10 bodů)

Problem 3. Determine the greatest common divisor of all numbers of the set $\{n^{13} - n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. (10 bodů)

Problem 4. Let $S_n = \{(x, y) |\ x = 1, 2, \ldots, n,\ y = 1, 2, 3\}$. By *path of a rook over* S_n we denote any sequence $p_1, p_2, \ldots, p_{3n} \in S_n$ such that the distance of p_i and p_{i+1} is one for $1 \leq i < 3n$ and every element of S_n occurs in the sequence exactly once. How many paths of a rook over S_n do satisfy $p_1 = (1, 1)$ a $p_{3n} = (n, 1)$? (15 bodů)