

1. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 16. 10. 2023.

Úloha 1. Kolik $x \in (0, 24\pi)$ splňuje $\cos x = \cos \frac{x}{4}$?

Úloha 2. Nechtě $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že rovnice $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ má (komplexní) kořen splňující $|z| = 1$, právě když $6 \mid n + 2$.

Úloha 3. Buď $p(x, y)$ reálný polynom dvou proměnných. Najděte všechny možné obory hodnot $p(\mathbb{R}^2)$.

Úloha 4. *Výškou* v konvexním pětiúhelníku nazveme kolmici spuštěnou z vrcholu na protější stranu (tj. na tu, která nemá společný bod s ani jednou ze stran, pro které je zvolený vrchol krajním bodem). Dokažte, že pokud se čtyři výšky protínají v jednom bodě, pak tímto bodem prochází i pátá výška.

Úloha 5. V rovině je dána konečná množina bodů s celočíselnými souřadnicemi. Je možné obarvit každý bod množiny bíle nebo červeně takovým způsobem, aby se na každé přímce rovnoběžné s některou z os lišil počet bílých a červených bodů nejvýše o jedna?

Úloha 6. Pro každé přirozené číslo n zapišme racionální číslo $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ jako zlomek v základním tvaru $\frac{p_n}{q_n}$. Najděte všechna přirozená čísla n , pro něž q_n není dělitelné pěti.