

## 5. soutěžní série

28. 11. 2022

**Úloha 1.** Najděte nezáporná celočíselná řešení rovnice

$$(1 + m!)(1 + n!) = (m + n)!$$

**Úloha 2.** Mějme libovolný trojúhelník  $ABC$ . Ukažte, že je možné ho dvěma úsečkami rozdělit na tři osově symetrické části.

**Úloha 3.** Necht'  $a_{i,j}$  jsou přirozená čísla pro všechna  $i, j \in \mathbb{N}$  a necht' se každé přirozené číslo objeví právě šestkrát mezi čísly  $a_{i,j}$ . Ukažte, že  $a_{i,j} > ij$  pro nějaké  $i, j$ .

**Úloha 4.** Necht'  $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá nerostoucí funkce. Ukažte, že pak

$$\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx \leq \int_0^1 f(x)dx.$$

Kdy nastává rovnost?