5. soutěžní série – řešení

1. BÚNO $m \le n$. Kdyby $m = 0$, pak by levá strana byla větší. Kdyby $m \ge 2$, pak by levá strana byla lichá a pravá sudá. Tj. $m = 1$ a rovnost $2(n! + 1) = (n + 1)!$ je ekvivalentní s $2 = (n - 1)n!$. Evidentně $n \ge 3$ nevyhovuje, $n = 2$ ano a $n = 1, 0$ nikoli. Tj. $(1, 2)$ a $(2, 1)$ jsou jediná řešení.

2. Motivace: pravoúhlý trojúhelník rozdělí spojnice pravoúhlého vrcholu se středem přepony na dva rovnoramenné trojúhelníky.

Buď A vrchol s největším vnitřním úhlem, pata P z něj spuštěné výšky na BC leží uvnitř BC. Označme X, Y po řadě středy stran AB, AC. Pak trojúhelníky BXP, CYP jsou rovnoramenné a čtyřúhelník $AXPY$ je deltoid.

3. Předpokládejme pro spor $a_{i,j} \le ij$ pro všechny dvojice (i, j). Označme $p(N)$ počet dvojic (i, j), pro něž $ij \le N$. Platí $p(N) = \lfloor \frac{N}{1} \rfloor + \lfloor \frac{N}{2} \rfloor + \lfloor \frac{N}{3} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{N}{N} \rfloor \ge \frac{N}{1} - 1 + \frac{N}{2} - 1 + \cdots + \frac{N}{N} - 1 = N(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - 1)$. Vyskytuje-li se každá hodnota mezi čísly $a_{i,j}$ právě šestkrát, pak dvojic splňujících $a_{i,j} \le ij \le N$ může být nejvýše $6N$. Tedy $6N \ge p(N) \ge N(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N})$, což pro velká N dává spor.

4. Protože f je nerostoucí a $0 \le \cos \le 1$ na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, platí

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)(1-\cos(x))dx &\le f\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(x))dx \\
&= f\left(\frac{\pi}{2}-1\right)[t-\sin(t)]_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= f\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(\frac{\pi}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\left(\left(\frac{\pi}{2}-1\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right)\right) \\
&= f\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= f\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \cos(x)dx \\
&\le \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} f(x)\cos(x)dx.
\end{aligned}$$

To jednoduše upravíme na

$$\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(x)dx.$$

Rovnost v první nerovnosti nastane když $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ pro všechna $x \ge \frac{\pi}{2}-1$, a ve druhé když $f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ pro všechna $x \le \frac{\pi}{2}-1$. Tedy rovnost může nastat jen pro f konstantní. (Jednoduše ověříme, že konstanta funguje.)

Druhá zadaná nerovnost se ukáže zcela analogicky.