4. soutěžní série – řešení

1. Předpokládejme, že body jsou po dvou různé (jinak zvolíme jeden ze dvojice stejných bodů a tvrzení je triviální). Pokud leží jeden z bodů v konvexním obalu zbylých tří, zvolíme ty tři body. Pokud ne, pak tvoří body konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a některá dvojice protilehlých úhlů (BÚNO u B, D) má součet aspoň 180°. Pak volíme A a C. Kruh obsahující A a C bude obsahovat kružnici procházející jimi. Dle věty o obvodovém úhlu je vidět, že bude obsahovat aspoň jeden z bodů B a D.

2. Aplikujeme-li (2) dvakrát po sobě, dostaneme

$$(a \circ b) \circ c = (b \circ c) \circ a = (c \circ a) \circ b. \tag{*}$$

Aplikujme nyní (1) a poté (*): $a \circ b = (a \circ b) \circ (a \circ b) = ((a \circ b) \circ a) \circ b$. Dále dle (*) a (1): $((a \circ b) \circ a) = (a \circ a) \circ b = a \circ b$. Dosadíme-li do předchozího výpočtu: $a \circ b = ((a \circ b) \circ a) \circ b = (a \circ b) \circ b$, což se dle (*) a (1) rovná $(b \circ b) \circ a = b \circ a$ a komutativita je dokázána. Asociativita nyní plyne ihned z (2) a komutativity.

3. Jistě $f(x) = x$ vyhovuje. Ukážeme, že je to jediné řešení. Nechť f splňuje (a) a (b). Z (a) dostáváme pro každé přirozené n rovnost $f(x+n) = f(x) + n$. Počítejme nyní $f(\frac{p+q^2}{q})^2$ pro přirozená p, q. Jednak s využitím (b) a následně (a) máme

$$f\left(\frac{p+q^2}{q}\right)^2 = f\left(\left(\frac{p+q^2}{q}\right)^2\right) = f\left(\frac{p^2}{q^2} + 2p + q^2\right) = f\left(\frac{p^2}{q^2}\right) + 2p + q^2.$$

Použijeme-li nejdřív (a) a potom (b), získáme

$$f\left(\frac{p+q^2}{q}\right)^2 = \left(f\left(\frac{p}{q}\right) + q\right)^2 = f\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) + q^2 = f\left(\frac{p^2}{q^2}\right) + 2qf\left(\frac{p}{q}\right) + q^2.$$

Odtud $p = qf(p/q)$, tj. $f(p/q) = p/q$.

4. Zkonstruujeme konečnou posloupnost matematickou indukcí. Pro $k = 3$ vyhovuje např. 2, 3, 6. Máme-li vyhovující $a_1, \ldots, a_k$, pak jistě i $ca_1, \ldots, ca_k$ bude vyhovovat. Nyní stačí k původní posloupnosti přidat nultý člen $a_0 = \frac{a_1+a_2}{a_1 a_2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}$, aby byla splněna rekurence a celou posloupnost vynásobit $a_1 a_2$, aby nová posloupnost byla tvořena přirozenými čísly.

Dokážeme, že nekonečná posloupnost neexistuje. Označme s_k nejmenší společný násobek $a_1, \ldots, a_k$. Pro pevné i označme d, n po řadě největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel a_i a a_{i+1}. Protože $a_{i+2}(a_{i+1} - a_i) = a_i a_{i+1} = dn$, máme

$$a_{i+2}\frac{a_{i+1} - a_i}{d} = n$$

a protože $\frac{a_{i+1}-a_i}{d}$ je celé číslo, tak $a_{i+2} | n$, tj. $s_2 = s_3 = s_4 = \ldots$. Toto číslo má však jen konečný počet dělitelů, spor.