2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 24. 10. 2022.

Úloha 1. Nechť $f : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$ je zobrazení takové, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$ platí $f(mn) = f(m)f(n)$. Ukažte, že existuje přirozené a splňující $1 \leq a \leq 12$, pro které je $f(a) = f(a+1) = 1$.

Úloha 2. Posloupnost $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ splňuje $a_{n+1} = 10^n a_n^2$. Pro která $a_0 \in \mathbb{R}$ je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

Úloha 3. Nechť komplexní čísla a, b, c splňují $|a| = |b| = |c| = 1$ a $a^3 + b^3 + c^3 = 2abc$. Dokažte, že pak a, b a c tvoří rovnoramenný trojúhelník.

Úloha 4. Nalezněte všechny dvojice komplexních polynomů f, g takových, že pro každé komplexní z platí

$$f(f(z)) - g(g(z)) = 1 + i$$

a

$$f(g(z)) - g(f(z)) = 1 - i.$$

Úloha 5. Pro přirozené číslo n označíme jako $\sigma(n)$ součet kladných dělitelů n a jako *výšku* čísla n nazveme hodnotu $\frac{\sigma(n)}{n}$. Ukažte, že pro všechna přirozená k, N existuje k po sobě jdoucích přirozených čísel takových, že všechna mají výšku alespoň N.

Úloha 6. Body A, B, C ležící v rovině mají celočíselné souřadnice. Nechť vnitřek trojúhelníku ABC obsahuje jediný bod D s celočíselnými souřadnicemi. Polopřímka AD protne úsečku BC v bodě E. Jaký je největší možný podíl délek úseček $\frac{|AD|}{|DE|}$?