1. soutěžní série – řešení

1. A určitě může mít dva prvky (například $A = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ funguje). Zároveň, kdyby měla alespoň tři různé prvky, označme je a, b, c, pak $p = a + b$, $q = b + c$ i $r = c + a$ jsou racionální. Potom i $\frac{p-q+r}{2}$ je racionální. Ale $\frac{p-q+r}{2} = \frac{(a+b)-(b+c)+(c+a)}{2} = a$, což je spor s tím, že a je iracionální. Tedy A může mít nanejvýš dva prvky.

2. Označme $n = \lfloor x \rfloor$. Zjevně $n \geq 0$, jinak by $4x^2 - 40n + 51 \geq 51 > 0$. Pak pro pevné n vyhovuje právě takové x, že $x^2 = \frac{40n-51}{4}$, čili (díky $0 \leq n \leq x$) $x = \sqrt{10n - \frac{51}{4}}$. Potřebujeme ale, aby $\lfloor x \rfloor = n$. Tedy vyhovují právě x tvaru $\sqrt{10n - \frac{51}{4}}$, pro která $n \leq x < n+1$, neboli $n^2 \leq 10n - \frac{51}{4} < (n+1)^2$. Z první nerovnosti dostaneme $0 \geq n^2 - 10n + \frac{51}{4} = \left(n - \frac{3}{2}\right)\left(n - \frac{17}{2}\right)$, čili $\frac{3}{2} \leq n \leq \frac{17}{2}$, čili (protože n je celé) $2 \leq n \leq 8$. Z druhé nerovnosti dostaneme $0 < n^2 - 8n + \frac{55}{4} = \left(n - \frac{5}{2}\right)\left(n - \frac{11}{2}\right)$, tedy buď $n < \frac{5}{2}$, nebo $n > \frac{11}{2}$, čili buď $n \leq 2$ nebo $n \geq 6$. Tedy obě dvě nerovnosti splňují právě $n = 2, 6, 7, 8$. Tedy vyhovují právě $x \in \left\{\frac{\sqrt{29}}{2}, \frac{\sqrt{189}}{2}, \frac{\sqrt{229}}{2}, \frac{\sqrt{269}}{2}\right\}$.

3. Pro sudá $n = 2k$ vezmeme $B = \{1, k-1, 2k\}$, $A = \{1, \ldots, n\} \setminus B$ a pro lichá $n = 2k+1$ vezmeme $B = \{1, k, 2k\}$, $A = \{1, \ldots, n\} \setminus B$.

4. Rozdělme členy $\frac{2^{-n}}{2^{2^{-n}}+1}$ zkoumané sumy

$$\frac{2^{-n}}{2^{2^{-n}}+1} \cdot \frac{2^{2^{-n}}-1}{2^{2^{-n}}-1} = \frac{2^{-n}(2^{2^{-n}}+1) - 2 \cdot 2^{-n}}{2^{2^{-(n-1)}}-1} = \frac{2^{-n}}{2^{2^{-n}}-1} - \frac{2^{-(n-1)}}{2^{2^{-(n-1)}}-1}.$$

Je teleskopickou řadou se součtem

$$-\frac{2^0}{2^{2^0}-1} + \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n}}{2^{2^{-n}}-1} = -1 + \lim_{x\to 0_+} \frac{x}{\exp(\log(2)x) - 1} = \frac{1}{\log 2} - 1.$$