

7. soutěžní série

3. 1. 2022

Úloha 1. Řekneme, že kladné celé číslo n je *novoroční*, pokud je dělitelné číslem $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor$. Kolik existuje novoročních čísel n takových, že $1 \leq n \leq 1000$? (5 bodů)

Úloha 2. Určete 2022. derivaci funkce $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-x}$. (10 bodů)

Úloha 3. Nalezněte všechny dvojice reálných čísel (a, b) , které splňují

$$\frac{4-a}{b} = \frac{5-b}{a} = \frac{10}{a^2+b^2}.$$

(10 bodů)

Úloha 4. Slovu tvořenému právě k různými písmeny přiřadíme váhu $\frac{1}{27-k}$. Ukažte, že součet vah všech 26^{26} slov délky 26 tvořených písmeny anglické abecedy je 3^{75} . (15 bodů)