7. soutěžní série – řešení

1. Každý dělitel $\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = k$ dělí právě čísla $k^3, k^3+k, \ldots, k^3+3k^2+3k = (k+1)^3-1$, jichž je $3k+4$ pro všechna možná $k = 1, 2 \ldots, 9$ a jedno pro $k = 10$ a $n = 1000$. Novoročních čísel je celkem $\sum_{k=1}^{9}(3k+4)+1 = 3\frac{9\cdot 10}{2}+9\cdot 4+1 = 172$.

2. Funkci f rozložíme na parciální zlomky $\frac{x^2+1}{(x-1)x(x+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$, použijeme $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n n! \frac{1}{x^{n+1}}$ a vyjde $f^{(2022)}(x) = (2022)!\left(\frac{1}{(x-1)^{2023}} - \frac{1}{x^{2023}} + \frac{1}{(x+1)^{2023}}\right)$.

3. Označme společnou hodnotu ze zadání jako c. Pak platí $ac = 5-b$ a $bc = 4-a$, takže je

$$10 = (a^2+b^2)c = a(5-b)+b(4-a) = 5a+4b-2ab,$$

neboli

$$(a-2)(2b-5) = 2ab-5a-4b+10 = 0.$$

Tedy $a = 2$ nebo $b = \frac{5}{2}$. Z $\frac{4-a}{b} = \frac{5-b}{b}$ plyne $a^2-4a = b^2-5b$. Pokud $b = \frac{5}{2}$, pak $(a-2)^2+\frac{9}{4} = a^2-4a+\frac{25}{4} = 0$, což je spor. Takže musí být $a = 2$. Pak $(b-1)(b-4) = b^2-5b+4 = 0$, takže $b = 1$ nebo $b = 4$. Jednoduchou zkouškou ověříme, že $(a,b) = (2,1)$ i $(a,b) = (2,4)$ fungují.

4. Všimněme si, že $3^{75} = 27^{25}$, což je počet slov o 25 písmenech 27-písmenné abecedy. Přidejme tedy do anglické abecedy znak $\heartsuit$ a najděme bijekci. Uvažujme 25-písmenné slovo S naší rozšířené abecedy, které je tvořené právě k písmeny a případně několika znaky $\heartsuit$. Slovu S přiřaďme následujících $26-k$ slov: pro každé písmeno P, které se v S nevyskytuje, nahraďme ve slově S každý znak $\heartsuit$ písmenem P a ještě jedno písmeno P přidejme na konec slova. Každé takto vzniklé slovo obsahuje $k+1$ různých písmen, jeho váha je tedy $\frac{1}{26-k}$. Celková váha $26-k$ slov vzniklých z S je tedy 1. Stačí si rozmyslet, že každé 26-písmenné slovo tvořené písmeny anglické abecedy získáme právě jedním způsobem. A to je snadné: podívejme se na poslední písmeno, odeberme ho a všechny jeho další výskyty ve slově nahraďme znakem $\heartsuit$.