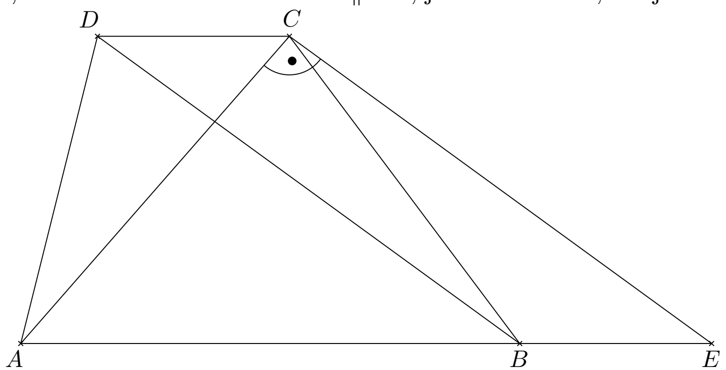
5. soutěžní série – řešení

1. Parita $ka_i + \ell b_i + mc_i$ závisí pouze na paritě čísel a_i, b_i, c_i, k, ℓ, m. Všimneme si, že pro pevné i vedou právě čtyři možnosti k, ℓ, m na lichou sumu $ka_i + \ell b_i + mc_i$ (pro $(1,0,0)$ volíme $(1,x,y)$, pro $(1,1,0)$ volíme $(x,1-x,y)$, pro $(1,1,1)$ volíme $(x,y,1-x-y)$) a alespoň jedno z nich je vždy liché. Tedy $4n$ možností (k,ℓ,m,i) vede na lichou sumu. Ale máme $2^3 - 1 = 7$ trojic (k,ℓ,m), a proto z Dirichletova principu pro některou z nich bude suma lichá pro alespoň $\frac{4n}{7}$ různých i.

2. Nechť rovnoběžka s BD skrze C protíná přímku AB v bodě E. Protože $CD \parallel BE$ a $CE \parallel BD$, je $BECD$ rovnoběžník. Speciálně $|CE| = |BD|$ a $|BE| = |CD|$. Potom

$$|AC|^2 + |CE|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = (|AB| + |CD|)^2 = (|AB| + |BE|)^2 = |AE|^2.$$

To potom z obrácené Pythagarovy věty znamená, že trojúhelník ACE má v bodě C pravý úhel, takže $AC \perp CE$. Protože $CE \parallel BD$, je už $AC \perp BD$, což jsme chtěli.



3. Sporem. Pokud by limita nebyla nula, pak $x_n f(x_n) > \varepsilon$ pro nějakou rostoucí posloupnost $x_n \to +\infty$. Pak $f(x_n) > \varepsilon/x_n$ a z monotonie $f(x) > \varepsilon/x_n$ pro všechna $x \in [x_{n-1}, x_n]$. Můžeme BÚNO předpokládat, že $x_n > 2x_{n-1}$ (některé členy můžeme vynechat, aby toto platilo). Pak

$$\int_{x_0}^{+\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{x_n}(x_n - x_{n-1}) = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

Protože poslední závorka je $\geq \frac{1}{2}$, suma diverguje a integrál je roven $+\infty$.

4. Uvažujeme vrcholy tabulky jako body (a,b), kde a, b jsou celá čísla, pro která $0 \leq a, b, < p$. Nechť $P(n)$ je zbytek čísla n po dělení p (tj. číslo mezi 0 a $p-1$). Uvažujme p bodů tvaru $(a, P(a^2))$ pro všechna $a = 0, \ldots, p-1$. Chceme ukázat, že žádné tři z nich neleží na přímce. Pro spor nechť $0 \leq a < b < c < p$ splňují, že $(a, P(a^2))$, $(b, P(b^2))$ a $(c, P(c^2))$ leží na jedné přímce. Pak $\frac{P(c)-P(b)}{c-b} = \frac{P(b)-P(a)}{b-a}$, neboli $(b-a)((P(c)-P(b)) = (c-b)(P(b)-P(a))$. Takže modulo p platí

$$(b-a)(c^2-b^2) \equiv (b-a)((P(c)-P(b)) = (c-b)(P(b)-P(a)) \equiv (c-b)(b^2-a^2) \pmod p,$$

což můžeme (díky $c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$ a $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ upravit na

$$0 \equiv (b-a)(c^2-b^2) - (c-b)(b^2-a^2) = (b-a)(c-b)((c+b)-(b+a)) = (b-a)(c-b)(c-a) \pmod p.$$

Ale $b-a$, $c-a$ i $c-b$ jsou kladná čísla menší než p, tedy nemohou být dělitelná p a tedy (protože p je prvočíslo) ani jejich součin nemůže být dělitelný p, což je spor.