2. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 25. 10. 2021.

Úloha 1. Nechť aritmetická posloupnost přirozených čísel obsahuje n-tou mocninu. Ukažte, že pak už musí obsahovat nekonečně mnoho n-tých mocnin.

Úloha 2. Buď Q konvexní čtyřúhelník, Q_1 čtyřúhelník tvořený osami stran čtyřúhelníku Q a Q_2 čtyřúhelník tvořený osami stran čtyřúhelníku Q_1. Ukažte, že Q a Q_2 jsou podobné. Jaký může být poměr jejich obsahů?

Úloha 3. Nechť je $A \subset \mathbb{R}^2$ souvislá množina a $C \subset A$ její omezená podmnožina. Musí existovat souvislá a omezená množina B splňující $C \subset B \subset A$? (Množina je souvislá, pokud se nedá napsat jako sjednocení dvou disjunktních uzavřených množin.)

Úloha 4. Daná $n \times n$ matice M sestává z nul a jedniček, přičemž v každém řádku a v každém sloupci je právě k jedniček. Zobecněnou diagonálou rozumějmě každou takovou n-tici prvků M, že žádné dva neleží ve stejném sloupci ani ve stejném řádku. Dokažte, že M má aspoň k po dvou disjunktních zobecněných diagonál tvořených pouze jedničkami.

Úloha 5. Pro reálné číslo x označme

$$f(x) = \sum_{n \in S_x} \frac{1}{2^n}, \qquad S_x = \{n \in \mathbb{N} : \lfloor nx \rfloor \text{ je sudé}\}.$$

Najděte $\inf\{f(x) : x \in [0,1)\}$.

Úloha 6. Buď k liché přirozené číslo a nechť A a B jsou hermiteovské $n \times n$ matice splňující $A^k + B^k = 2I$. Dokažte, že $2I - A - B$ je pozitivně semidefinitní.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`